

Федеральное агентство по образованию  
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»



**В.П. Битюцкий, Н.В. Папуловская**

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.  
ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ  
И ПРЕДИКАТОВ**

Учебное электронное текстовое издание  
Подготовлено кафедрой «Автоматика и информационные технологии»  
Научный редактор: доц., канд. техн. наук Г.Б. Захарова

Методическое пособие по дисциплине  
«Математическая логика и теория алгоритмов»

Приводятся основные понятия и утверждения логики высказываний и предикатов. В логике высказываний даются основные методы построения вывода. В логике предикатов вводятся нормальные формы описания предметной области и получение вывода с помощью метода резолюций.

© ГОУ ВПО УГТУ–УПИ, 2005

Екатеринбург  
2005

**СОДЕРЖАНИЕ**

Введение .....	3
1. Исчисление высказываний .....	5
1.1. Высказывания .....	5
1.2. Формулы .....	6
1.3. Выполнимые и общезначимые формулы .....	11
1.4. Алгебраический подход .....	13
1.5. Дизъюнкты и нормальные формы .....	14
1.6. Логический вывод.....	16
1.6.1. Прямой вывод.....	16
1.6.2. Доказательство «от противного».....	17
1.6.3. Метод резолюций .....	18
1.6.4. Фразы Хорна.....	19
1.7. Примеры использования метода резолюций в логике высказываний .....	22
1.8. Непротиворечивость аксиом .....	24
1.9. Аксиоматизация логики высказываний .....	25
2. Исчисление предикатов .....	29
2.1 Предикаты .....	29
2.2. Применение логических связок .....	31
2.3. Кванторы.....	32
2.4. Свободные и связанные переменные. ....	33
2.5. Предикатные формулы.....	36
2.6. Предварённая нормальная форма .....	37
2.7. Сколемовская и клаузальная формы .....	39
2.8. Метод резолюций в логике предикатов .....	41
2.9. Принцип логического программирования .....	41
Библиографический список.....	43

## ВВЕДЕНИЕ

Слово «Логика» означает систематический метод рассуждений, но обычно под логикой понимают анализ методов рассуждений. Логика – наука о способах доказательств и опровержений, совокупность научных теорий, рассматривающих определённые способы доказательств и опровержений.

Для любой произвольной задачи возможны два разных способа её постановки. Можно определить, ЧТО нужно делать, например, поставить задачу так: «найти минимальный остов в заданном графе». Можно сформулировать, КАК решить задачу. Например: «в заданном графе выбрать минимальное по стоимости ребро и включить его в решение. Затем из оставшихся ребер снова взять минимальное ребро и включить в решение, если при этом не образуются циклы. Так делать пока число ребер не станет на единицу меньше, чем число вершин. Если описанный алгоритм сделать можно, получим решением остов графа, если нельзя, то в графе остова нет, и он не связан».

Сегодня все больше задач ставится для решения с помощью ЭВМ. Всё больше специалистов – не программистов привлекается к этому, и им, естественно, более подходит способ постановки задачи через ЧТО, а уж КАК решить, по какому алгоритму, пусть выбирает машина исходя, может быть, из особенностей конкретной задачи. Кроме того, все больше становится задач, для которых или алгоритма нет, или он чрезвычайно сложен, или требует данных, которых нет или они труднодоступны. Для них постановка через КАК невозможна.

Для того чтобы ставить и решать задачи на уровне ЧТО, необходимо описать ту предметную область, в которой должна решаться задача. Для нашего примера необходимо описать, что такое граф, остов и пр. Область знаний, которая занимается вопросами описания предметной области для решения различного рода задач, в том числе неформализуемых и плохо формализуемых, называется *искусственным интеллектом*, в рамках которого и создаются так называемые *экспертные системы*. Математическим инструментом для них служит *математическая логика (матлогика)*.

*Матлогика занимается формальными законами построения суждений и доказательств.*

Логика не интересуется истинностью или ложностью отдельных посылок и заключений. Она только выясняет, вытекает ли истинность заключения данного рассуждения из истинности его посылок. Если мы имеем некоторое множество гипотез, которые считаются истинными, и некоторое заключение, то логика, как наука, доказывает, является ли данное заключение истинным, другими словами, является ли оно логическим следствием множества гипотез.

Для рассмотренного примера, задача может быть сформулирована как доказательство истинности высказывания о том, что некоторый частичный граф является остовом.

Начало математической логики было положено в 1847г. работами Джорджа Буля «Математический анализ логики» С развитием математической логики в ней возникли свои специфические задачи. Появились различные системы математических логик: классическая, конструктивная, модальная, нечёткая, комбинаторная и др. Все эти теории объединяет стремление к каталогизации таких способов рассуждений, которые от истинных суждений-посылок приводят к истинным суждениям-следствиям. Каталогизация осуществляется, как правило, в рамках логических исчислений.

Рассматривается два уровня описания предметной области с разной степенью подробности – с помощью высказываний и с помощью предикатов.

# 1. ИСЧИСЛЕНИЕ ВЫСКАЗЫВАНИЙ

## 1.1. Высказывания

Логика высказываний – самый простой раздел математической логики, лежащий в основе всех остальных ее разделов. Основными объектами рассмотрения являются высказывания. Под высказыванием понимают повествовательное предложение, о котором можно сказать одно из двух: истинно оно или ложно.

Пусть есть множество высказываний, фраз, принимающих значение «истина» или «ложь». Примером могут быть фразы «сегодня холодно», «Идёт дождь», «Коля Петров учится в группе Р-23022», «Президент России поехал в Китай» и др. Будем называть их *элементарными* высказываниями и обозначать прописными буквами латинского алфавита. При этом отвлечёмся от конкретного смысла высказывания, оставим только его истинностное значение.

В исчислении высказываний не рассматриваются утверждения, имеющие значения, отличные от значений «истинно» и «ложно». Не рассматривается и трёхзначная логика, со значениями, скажем «Да», «Нет», «Не знаю». Ответ отличный от «Да» должен быть «Нет». Древние философы называли этот принцип законом исключения третьего.

*Высказывание – это утверждение, которое может быть только истинно или ложно.* Его принято обозначать символами Т (от True), или F (от False), или соответственно, 1 (для истинного значения) или 0 (для значения ложь).

Значение высказывания зависит от предметной области. Например, высказывание «число 15 – простое» будет истинным в восьмеричной и ложным в десятичной системе счисления. Поэтому весьма важно конкретизировать область на которой определено употребляемое высказывание.

## 1.2. Формулы

Из элементарных высказываний строятся более сложные высказывания с помощью логических связок «НЕ», «И», «ИЛИ», «ТО ЖЕ, ЧТО» («ЭКВИВАЛЕНЦИЯ»), «ИЗ ... СЛЕДУЕТ...». («... ВЛЕЧЁТ...», «...ПОТОМУ, ЧТО...»). Эти связки называются *сентенциональными*. Связки логики высказываний представляют функции истинности или функции алгебры логики. В таб.1.1 представлены логические связки и их обозначения.

Таблица 1.1

Название	Тип	Обозначение	Как читается	Другие обозначения
Отрицание	Унарный	$\neg$	не	$\bar{\phantom{x}}$ , not, не
Конъюнкция	Бинарный	$\wedge$	и	&, ., and, и
Дизъюнкция	Бинарный	$\vee$	или	, or, или
Импликация	Бинарный	$\rightarrow$	влечёт	$\Rightarrow$ , $\supset$
Эквивалентность	Бинарный	$\Leftrightarrow$	эквивалентно	$\leftrightarrow$ , $\approx$

*Определение 1.* Отрицанием высказывания  $p$  называется высказывание  $\neg p$  (или  $\bar{p}$ ), которое истинно только тогда, когда  $p$  ложно.

*Пример.* Высказывание «Неправда, что идёт снег» является отрицанием высказывания «идёт снег».

*Определение 2.* Конъюнкцией высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание, которое истинно только тогда, когда  $p$  и  $q$  истинны., т.е.  $p = 1$  и  $q = 1$ .

*Пример.* Чтобы успешно сдать экзамен, нужно иметь при себе зачётку и правильно ответить на вопросы. Для успешной сдачи экзамена нужно выполнить оба условия. Если обозначить как  $p$  – «иметь зачётку» и  $q$  – «правильно ответить на вопросы», то условием сдачи будет конъюнкция высказываний  $p$  &  $q$ .

*Определение 3.* Дизъюнкцией высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, т. е.  $p = 0$  и  $q = 0$ .

*Примеры.*  $(7 > 3 \text{ или } 4 \neq 1) = 1$ ; (или  $\sin 2x$  имеет период  $2\pi$ , или  $\sqrt{2}$  – рациональное число) = 0.

*Определение 4.* Импликацией высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание, которое ложно тогда и только тогда, когда  $p$  истинно,  $q$  ложно, т.е.  $p = 1$  и  $q = 0$  (из  $p$  следует  $q$ ).

*Пример.* Вышеприведённый пример с успешной сдачей экзамена можно записать как  $p \& q \rightarrow r$ , где  $r$  – «успешно сдать экзамен».

*Определение 5.* Эквиваленцией высказываний  $p$  и  $q$  называется высказывание, которое истинно только и только тогда, когда значения высказываний  $p$  и  $q$  совпадают ( $p$  эквивалентно  $q$ ).

*Пример.* «Граф является двудольным тогда и только тогда, когда он не содержит циклов нечётной длины». Если  $p$  – высказывание «иметь циклы нечётной длины»,  $q$  – «граф двудольный», то начальная фраза примера запишется в виде  $q \Leftrightarrow \bar{p}$ .

Значения истинности для бинарных связок представлены в табл. 1.2.

Таблица 1.2

$p$	$q$	$\bar{p}$	$p \vee q$	$p \& q$	$p \rightarrow q$	$P \Leftrightarrow q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	0	1	0
1	0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	1	1	1

С помощью связок можно получать составные высказывания, которым соответствует *формула*, например,  $(A \& B) \rightarrow (\bar{A} \vee B)$ . Такие высказывания на-

зывают *сложными*. Каждое сложное высказывание, как и элементарное принимает значение из множества  $\{F, T\}$ . В формулах используются скобки для определения порядка выполнения действий.

*Пример.* Пусть значения элементарных высказываний:  $p_1 = 1$ ,  $p_2 = 0$ ,  $p_3 = 1$  и имеется составное высказывание:

$$((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3) \Leftrightarrow (\neg p_2 \vee p_3).$$

Найти значение сложного высказывания.

*Решение:*

$$((\neg p_1 \wedge p_2) \rightarrow p_3) \Leftrightarrow (\neg p_2 \vee \neg p_3)$$

$$0 \quad 0 \quad 1 \quad 1 \quad 0$$

$$0 \quad 1 \quad \quad 1$$

$$1$$

*Ответ:* Значение сложного высказывания – 1.

Итак, словарь исчисления высказываний даёт возможность строить сложные высказывания из простых или элементарных, соединяя последние связками. Получаем формулы, которые являются объектами языка. Аналогия с естественными языками очевидна: фраза – это составное высказывание, построенное по определённым правилам.

Совокупность правил построения выглядит так:

- *Базис.* Всякое высказывание является формулой.
- *Индукционный шаг.* Если  $A$  и  $B$  формулы, то  $\neg A$ ,  $(A \vee B)$ ,  $(A \wedge B)$ ,  $(A \rightarrow B)$ ,  $(A \Leftrightarrow B)$  – формулы.
- *Ограничение.* Формула однозначно получается с помощью правил, описанных в базисе и индукционном шаге.

Множество всех формул *счётное* (можно установить взаимно однозначное соответствие между ним и множеством натуральных чисел), *разрешимое*



(можно достоверно выяснить, является ли данное высказывание формулой или нет).

Объектами изучения естественных и формальных языков являются синтаксис и семантика. *Синтаксис* позволяет распознать фразы среди наборов слов. *Семантика* придаёт определённое значение фразам. Высказывания либо истинны, либо ложны, значит *семантическая область*  $\{T, F\}$  или  $\{1, 0\}$ . Семантика есть набор правил интерпретации формул.

*Интерпретация* – это отображение  $i$ , сопоставляющее каждому элементарному высказыванию  $p$  некоторое значение истинности. Интерпретацию  $i$ , заданную на множестве элементарных высказываний, можно распространить на множество формул посредством таблиц истинности.

### **Контрольные упражнения**

1. Найти значения следующих формул:

- a.  $(\neg p_1 \rightarrow \neg(p_2 \Leftrightarrow p_3)) \wedge (\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)$ , если  $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 1$ .
- b.  $\neg(p_1 \rightarrow (\neg p_2 \rightarrow \neg(p_3 \Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge (p_2 \vee p_3))))$ , если  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$ .
- c.  $(p_1 \wedge p_2 \wedge p_3) \rightarrow (p_3 \vee (\neg p_2 \rightarrow p_1))$ , если  $p_1 = 1, p_2 = 0, p_3 = 0$ .
- d.  $\neg(p_1 \rightarrow \neg(p_2 \vee (\neg p_3 \wedge p_2 \Leftrightarrow p_3)))$ , если  $p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 1$ .
- e.  $(p_1 \vee \neg p_2) \rightarrow (p_3 \rightarrow \neg(p_2 \rightarrow \neg(p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg p_3)))$ , если  $p_1 = 0, p_2 = 0, p_3 = 1$ .

2. Записать символически высказывания, употребляя буквы для обозначения простых высказываний. Построить таблицы истинности для каждого высказывания:

Пётр ходит в кино только в том случае, когда там показывают комедию.

Необходимое и достаточное условие для жизни растений состоит в наличии питательной почвы, чистого воздуха и солнечного света.

- a. Студент не может заниматься, если он устал или голоден.

b. Если Иван выиграет в лотерею, он купит компьютер и будет праздновать всю ночь

c. Если он не выиграет в лотерею или не купит компьютер, то праздновать всю ночь не будет

d. Если Артёму нравятся фиолетовые галстуки, то он популярен и у него много друзей

e. Если Игорь носит желтые ботинки, то он не модный и если он не модный, то у него странные друзья.

f. Если он не удачлив, то он и не популярен

g. Он удачлив и богат, следовательно, он популярен.

h. Он читает научную литературу и любит фантастику, следовательно, он ученый-фантаст.

i. Если он информатик, то он либо работает за компьютером, либо читает книги об ЭВМ.

j. Если он или умеет писать или читать, то он грамотный человек.

k. Для того, чтобы натуральное число  $a$  было нечётным, достаточно, чтобы оно было простым и большим двух.

l. Необходимым условием сходимости последовательности  $S$  является ограниченность  $S$ .

m. У меня быстродействующий компьютер и я закончу проект вовремя и сдам экзамен.

3. Сколько строк содержит таблица истинности высказывания, состоящего из  $n$  компонентов?

### 1.3. Выполнимые и общезначимые формулы

Формула семантически выполнима, или просто выполнима, если её можно интерпретировать со значением истина. Например  $(p \ \& \ q)$  – выполнима.

Множество формул называют *выполнимым* (непротиворечивым), если найдется такая интерпретация, при которой все формулы истинны. Если такой интерпретации не находится, то множество невыполнимо (противоречиво).

Существуют высказывания, которые истинны в любой области. Примером может служить высказывание  $A \vee \bar{A}$ . Такие высказывания называются *обще-значимыми, тождественно-истинными* или *тавтологиями*. Отрицание общезначимой формулы является невыполнимая формула или *противоречие*.

Иногда из вида высказывания не ясно, является ли оно тавтологией. Проверка состоит в вычислении значения истинности высказывания на всех наборах значений входящих в него элементарных высказываний. Если формула содержит  $k$  различных высказывания, тогда она допускает  $2^k$  интерпретаций. Рассмотрев все эти  $2^k$  интерпретаций, можно определить, какая это формула.

Если  $A$  – формула, то запись  $\models A$  означает, что  $A$  – тавтология.

Необходимо уметь:

- Записывать в формальном виде любое сложное высказывание, сформулированное фразами естественного языка.
- Определять семантическую область составного высказывания.
- Определять, является ли данное высказывание тавтологией;

При переходе от высказываний на естественном языке некоторые связи могут иметь другой смысл. Так, связка И обозначает истинность формулы, только если истинны входящие в неё элементарные высказывания. Поэтому её значение (и смысл) не зависит от порядка элементарных высказываний в формуле (например, во фразе «холодно и идёт дождь»). Но рассмотрите предложения «он убил и ему стало страшно» или «ему стало страшно, и он убил». В первом варианте И по значению играет роль условного предложе-

ния («Ему стало страшно, потому что он убил»). Во втором варианте причина и следствие меняются местами.

В логике истина-ложь не всякое предложение имеет смысл. Например, предложение «это предложение ложно» не может быть ни ложным, ни истинным. Существуют парадоксы, т.е. рассуждений, приводящих к противоречиям. Например, парадокс лжеца. Некто говорит «Я лгу». Если при этом он не лжёт, то произнесённое им есть ложь, и поэтому он не лжёт. Если же при этом он говорит правду, то произнесённое им есть истина, и поэтому он лжёт. В любом случае оказывается, что он лжёт и не лжёт одновременно.

### *Контрольные упражнения*

1. Определить, является ли выражения тавтологией?
  - a.  $r \& (p \rightarrow q) \rightarrow q$ .
  - b.  $p \vee \neg q \& r \Leftrightarrow p$ .
  - c.  $(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q \vee r$ .
  - d.  $(\neg p \rightarrow q) \& (\neg p \rightarrow \neg q) \rightarrow p$ .
  - e.  $(p \rightarrow q) \& (q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r)$ .
2. Построить таблицы истинности для следующих выражений:
  - a.  $\neg r \& \neg (\neg s \& \neg p) \rightarrow p$ .
  - b.  $\neg p \Leftrightarrow q \wedge \neg r$ .
  - c.  $((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \wedge p) \rightarrow (p \rightarrow r)$ .
  - d.  $(p \rightarrow \neg q) \wedge (s \wedge p \rightarrow s)$ .
  - e.  $\neg p \vee (\neg (p \wedge s) \rightarrow (\neg s \wedge r))$ .

### 1.4. Алгебраический подход

Семантика произвольной формулы исчисления высказываний полностью определяется её таблицей истинности. Разные формулы могут иметь одну и ту же семантику.

Для логических формул важно уметь обнаруживать эквивалентность двух различно представленных объектов.

*Определение.* Две формулы назовём равносильными, если для любых наборов значений переменных они принимают одинаковые значения.

$$A \equiv B \text{ тогда и только тогда, когда } \models A \Leftrightarrow B.$$

Чтобы преобразовать логическую формулу в равносильную полезно знать «замечательные тождества», которые задают различные способы представления объекта.

*Замечательные тождества.*

*I. Законы булевой алгебры.* Математик Джордж Буль (1815 – 1864) описал алгебру, основанную на операторах И, ИЛИ и НЕ.

Закон двойного отрицания (инволюция):  $\neg\neg A \equiv A$ ;

Законы коммутативности:  $A \& B \equiv B \& A$ ,

$$A \vee B \equiv B \vee A;$$

Законы ассоциативности:  $A \& (B \& C) \equiv (A \& B) \& C$ ,

$$A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C;$$

Законы дистрибутивности:  $A \& (B \vee C) \equiv (A \& B) \vee (A \& C)$ ,

$$A \vee (B \& C) \equiv (A \vee B) \& (A \vee C);$$

Свойства констант:  $A \& 1 = A$ ,  $A \& 0 = 0$ ,  $A \vee 1 = 1$ ,  $A \vee 0 = A$ .

Закон идемпотентности:  $A \& A \equiv A$ ;  $A \vee A \equiv A$ .

*II. Законы де Моргана:*

$$\neg (A \& B) \equiv \neg A \vee \neg B;$$

$$\neg (A \vee B) \equiv \neg A \& \neg B.$$

### III. Другие замечательные тождества

Связь операций:

$$A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B,$$

$$A \Leftrightarrow B \equiv (A \Rightarrow B) \& (B \Rightarrow A),$$

$$A \& B \equiv \neg(A \Rightarrow \neg B),$$

$$A \vee B \equiv \neg A \Rightarrow B,$$

$$A \Rightarrow \neg B \equiv B \Rightarrow \neg A.$$

Закон контрапозиции:  $A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$ .

Закон противоположности:  $A \Leftrightarrow B \equiv \neg A \Leftrightarrow \neg B$

Используя эти равносильности, можно по данной формуле построить ей равносильные или эквивалентные.

*Примеры.*

$$a) (A \vee A) \& B \vee A \equiv A \& B \vee A \equiv A \& B \vee A \& 1 \equiv A \& (B \vee 1) \equiv A \& 1 \equiv A.$$

$$b) B \rightarrow (\neg A \& B) \equiv \neg B \vee (\neg A \& B) \equiv (\neg B \vee \neg A) \& (\neg B \vee B) \equiv (\neg B \vee \neg A) \& 1 \equiv (\neg B \vee \neg A) \equiv \neg (B \& A).$$

### 1.5 Дизъюнкты и нормальные формы

Бывает полезно преобразовать заданную формулу в эквивалентную ей, имеющую вид «нормальной» или «канонической» формы.

*Дизъюнктом* называется дизъюнкция конечного числа высказываний, то есть формула вида

$$p_1 \vee p_2 \vee \dots \vee p_n \text{ или } \bigvee_{i=1}^n P_i \text{ или } \bigvee \{p_i \mid i=1, \dots, n\}$$

*Конъюнктивной нормальной формой* (КНФ) называется конъюнкция конечного числа дизъюнктов.

*Теорема.* Любая формула имеет логически эквивалентную ей КНФ.

*Алгоритм нормализации:*

Исключение связок эквивалентности и импликации;

Необходимое число раз применяются правила преобразования из законов де Моргана, чтобы отрицания перевести на уровень элементарных высказываний.

Необходимое число раз применяются законы дистрибутивности (раскрыть все скобки).

Дизъюнкты, содержащие противоположности (т.е. высказывание и его отрицание), общезначимы и могут быть опущены. Можно опускать повторения в пределах одного дизъюнкта. Полученная таким способом нормальная форма называется *приведённой*. В ней в каждый дизъюнкт любое элементарное высказывание входит не более одного раза.

Дизъюнкт общезначим тогда и только тогда, когда он содержит пару противоположных высказываний. Нормальная форма общезначима тогда и только тогда, когда все ее дизъюнкты общезначимы.

Понятие дизъюнкта важно для практики. Описание задач и алгоритмов в терминах дизъюнктов составляет основу логического программирования.

Двойственным понятием к дизъюнкту является *конъюнкт*. Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) – дизъюнкция конечного числа конъюнктов. Можно показать, что любая формула приводима к логически эквивалентной ей ДНФ.

*Контрольное задание.* Привести формулы к КНФ

a)  $r \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow s)$ ,

b)  $(r \& s) \rightarrow (q \& r)$ ;

c)  $(p \rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \rightarrow \neg s)$ ,

d)  $(r \& q) \Leftrightarrow (\neg p \vee s)$

e)  $(p \& r) \rightarrow (p \vee r)$

f)  $(p \& (r \vee \neg q)) \vee (\neg p \& r) \vee ((p \vee \neg q) \& \neg r)$

## 1.6. Логический вывод

Высказывание  $C$  есть *логическое следствие* высказываний  $H_1, H_2, \dots, H_n$ , что записывается в виде

$$\{H_1, H_2, \dots, H_n\} \mid = C,$$

если всякий раз, когда все  $H_i$  равны True, значение  $C$  тоже равно True. Здесь  $H_i$  могут быть формулами элементарных высказываний.

Говорят, что  $C$  следует из  $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ .

Выражения  $H_1, H_2, \dots, H_n$  называются *посылками* или *аксиомами*, а  $C$  – *выводом* из этих посылок или *теоремой*.

Фундаментальная проблема логики, называемая *проблемой вывода*, состоит в следующем: определить, является ли формула  $C$  логическим следствием множества формул  $H$ . Решение этой задачи называют *выводом* теоремы из аксиом.

Выводу сопоставляется цепочка высказываний  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , где  $C_k = C$ , а каждое высказывание  $C_i$  либо является тавтологией, либо следует из аксиом и высказываний, предшествующих данному.

### 1.6.1. Прямой вывод

В прямом выводе используется знание семантики тех операторов, через которые строятся аксиомы. Так, если аксиома утверждает, что  $A \& B$ , то из смысла этого утверждения следует, что истинными будут высказывания  $A$  и  $B$ , которые войдут в цепочку вывода. Если известно, что истинным являются высказывания  $\{A \vee B, \bar{A}\}$ , то истинным будет высказывание  $B$  именно исходя из смысла этих высказываний. В прямом выводе строится цепочка высказываний, обозначенная выше как  $C_1, C_2, \dots, C_k$ , которая и является выводом.

*Пример.* Доказать или опровергнуть следствие:

$$B \rightarrow \bar{A}, A \& D, B \vee C \mid = D \& C.$$

Пронумеруем аксиомы:  $B \rightarrow \bar{A}$  (1),  $A \& D$  (2),  $B \vee C$  (3).



Вывод. Из  $(2) \Rightarrow A$  (4), из  $(2) \Rightarrow D$  (5), из (4) и (1)  $\Rightarrow \bar{B}$  (6), из (6) и (3)  $\Rightarrow C$  (7), из (5) и (7) следует  $D \& C$ . Здесь используется свойство связок И, ИЛИ и СЛЕДУЕТ. Действительно,  $A \& B$  истинна, если истинны  $A$  и  $B$  одновременно (вывод 4 и 5). Если  $A = T$ , то  $\bar{A} = F$ , значит  $B$  не может быть  $T$ , т.е.  $B = F$  (вывод 6). Если  $B = F$  и  $B \vee C$  истинно, то  $C$  должно быть равно  $T$  (вывод 7). Наконец, из (7) и (5) следует искомый вывод.

### 1.6.2. Доказательство «от противного»

Из определения вывода вытекает, что если  $\{N_1, N_2, \dots, N_n\} \models C$ , то справедливо утверждение, что  $(N_1 \& N_2 \& \dots \& N_n) \models C$ , или, что  $\models (N_1 \& N_2 \& \dots \& N_n) \rightarrow C$ .

*Принцип дедукции.* Формула  $C$  является логическим следствием конечно-го множества  $N$  тогда и только тогда, когда  $N \cup \{\neg C\}$  невыполнимо.

$$\{N_1, \dots, N_n\} \models C \Leftrightarrow \{N_1, \dots, N_n, \neg C\} \models 0.$$

На основе этого утверждение строится способ доказательства, который называется доказательством «от противного» или «*reductio ad absurdum*». В этом случае в множество аксиом добавляется высказывание, равное отрицанию того, что необходимо вывести. После этого нужно доказать, что из расширенного множества аксиом выводимо противоречие.

*Пример.* Требуется доказать или опровергнуть вывод

$$\{\bar{A} \vee B, B \rightarrow C, A \vee D\} \models C \vee D.$$

Обозначим  $\bar{A} \vee B$  (1),  $B \rightarrow C$  (2),  $A \vee D$  (3). Введём ещё одно высказывание  $\neg(C \vee D) = \bar{C} \& \bar{D}$  (4) (по правилу де Моргана). Тогда из (4)  $\Rightarrow \bar{C}$  (5), из (4)  $\Rightarrow \bar{D}$  (6), из (6) и (3)  $\Rightarrow A$  (7), из (7) и (1)  $\Rightarrow B$  (8), из (8) и (2)  $\Rightarrow C$  (9), из (8) и (9)  $\Rightarrow C \& C$ , то есть противоречие. Значит, верно, что  $C \vee D$ .

Доказательством «от противного» имеет смысл пользоваться, когда необходимо доказать утверждение вида дизъюнкции или следования. Первый случай, как следует из примера 2, даёт для последующего доказательства сразу два

утверждения. Во втором случае из того, что  $\neg(B \rightarrow C) = B \& C$ , следует тоже два утверждения:  $B$  и  $\bar{C}$ . Используя их, необходимо построить противоречие.

Задача выявления выполнимости и общезначимости формулы может оказаться довольно длительной процедурой. Заманчиво иметь более эффективный алгоритм проверки, чем последовательный просмотр всех интерпретаций.

Если формула имеет вид КНФ, то её можно рассматривать как множество дизъюнктов. Множество дизъюнктов невыполнимо тогда и только тогда, когда пустой дизъюнкт является логическим следствием из него. Невыполнимость множества  $S$  можно проверить, порождая логическое следствие до тех пор, пока не получим пустой дизъюнкт.

### 1.6.3. Метод резолюций

Для порождения логических следствий используется очень простая схема рассуждений. Пусть  $A, B, X$  – формулы. Предположим, что две формулы  $(A \vee X)$  и  $(B \vee \neg X)$  – истинны. Если  $X$  – истинна, то следовательно  $B$  истинна. Наоборот, если  $X$  ложна, то можно заключить, что  $A$  – истинна. В обоих случаях  $(A \vee B)$  истинна. Получается правило

$$\{A \vee X, B \vee \neg X\} \models A \vee B,$$

которое можно записать в виде:

$$\{\neg X \vee A, X \vee B\} \models A \vee B.$$

Это правило называется *правилом резолюций*.

*Лемма.* Пусть  $s_1$  и  $s_2$  – дизъюнкты нормальной формы  $S$ ,  $l$  – высказывание. Если  $l \in s_1$  и  $\neg l \in s_2$ , то дизъюнкт  $r = (s_1 \setminus \{l\}) \cup (s_2 \setminus \{\neg l\})$  является логическим следствием нормальной формы  $S$ .

*Следствие.* Нормальные формы  $S$  и  $S \cup \{r\}$  эквивалентны.

*Замечание.* Дизъюнкт  $r$  называется *резольвентой* дизъюнктов  $s_1$  и  $s_2$ .

*Алгоритм проверки на выполнимость.*

2. выбираем  $l, s_1, s_2$ , такие что  $l \in s_1$  и  $\neg l \in s_2$ .
3. вычисляем резольвенту  $r$ ;
4. заменяем  $S$  на  $S \cup \{r\}$ .

Если множество не содержит ни одной пары дизъюнктов, допускающих резольвенту, то оно выполнимо. Конечное множество  $S$  невыполнимо тогда и только тогда, когда пустой дизъюнкт может быть выведен из  $S$  с помощью резольуций.

*Пример.* Проверим выполнимость множества

$$S = \{p \vee q, p \vee r, \neg q \vee \neg r, \neg p\}.$$

Дизъюнкты удобно пронумеровать:

1.  $p \vee q$
2.  $p \vee r$
3.  $\neg q \vee \neg r$
4.  $\neg p$

Вычисляем и добавляем резольвенты. В скобках указаны  $s_1, s_2$

5.  $q$  (1,4)
6.  $r$  (2,4)
7.  $\neg q$  (3,6)
8.  $0$  (5,7). Множество невыполнимо!

#### 1.6.4. Фразы Хорна

В прямом методе вывод проводился исходя из свойств связок и из того, что предметная область описывалась через импликацию, конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание. Этот способ удобен для представления человеком – специалистом, потому что ему проще выражать свои знания через высказывания ЕСЛИ..., ТО.... («ЕСЛИ температура  $>39$ , слабость и покраснение, ТО необходимо принять лекарство, лечь в постель и пить большое количество воды»).

Ронбисон предложил более удобную форму описания предметной области, позволяющий строить вывод с помощью ЭВМ.

Представим функцию импликации в виде минимальной ДНФ с помощью формулы;

$$A \rightarrow C \equiv \bar{A} \vee C$$

$(A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m) \rightarrow B \vee C$ , ей будет соответствовать формула (с учётом правила де Моргана)  $\bar{A}_1 \vee \bar{A}_2 \vee \dots \vee \bar{A}_m \vee B \vee C$ . Перенесём положительные литералы вперед и получим  $B \vee C \vee A_1 \vee \bar{A}_2 \vee \dots \vee \bar{A}_m$ . Такую формулу называют *фразой Хорна*, положительные литералы (B,C) называют *альтернативными следствиями*, негативные ( $\bar{A}_1, \bar{A}_2, \dots, \bar{A}_m$ ) – *необходимыми посылками*.

Хорновский дизъюнкт называется *точным*, если он содержит одну позитивную литеру. Если он не содержит позитивных литер, то называется *негативным*.

Точный дизъюнкт выражает некоторое правило: негативные литеры соответствуют гипотезам (которые представлены высказываниями), а позитивные заключения.

Унитарный позитивный хорновский дизъюнкт представляет собой некоторый факт, т.е. заключение не зависящее от каких-либо гипотез.

Задача состоит в том, что надо проверить некоторую цель логически выведенную из множества фактов и правил.

Алгоритм построения резолюций для множества фраз Хорна упрощается.

Рассмотрим множество S фраз Хорна. Алгоритма построения резолюций:

При условии Ложь  $\notin S$ ,

выбираем p и c, такие что:

p – унитарный позитивный дизъюнкт из S, c – дизъюнкт из S, содержащий  $\neg p$ , вычисляем резольвенту r; заменяем множество S на  $(S/\{c\} \cup \{r\})$ .

Таким образом, на каждом этапе одна фраза Хорна заменяется другой, и некоторый атом удаляется из одного дизъюнкта. Отсюда следует, что выполне-

ние алгоритма всегда завершается, какая бы стратегия ни была принята при выборе  $p$  и  $s$ . Если  $N$  – число атомов, первоначально присутствующих в  $S$  (с учётом повторений), то процедура вычисления резольвенты будет выполняться  $N$  раз.

Существует два случая завершения алгоритма: либо порождён пустой дизъюнкт, тогда множество будет не выполнимым, либо получено множество  $S$ , не содержащее дизъюнктов для вычисления очередной резольвенты, тогда множество  $S$  будет выполнимым.

Показано, что любую предметную область можно представить в виде фраз Хорна. Для этого любую формулу в описании предметной области необходимо преобразовать в КНФ (конъюнктивную нормальную форму – конъюнкцию элементарных дизъюнкций) и далее каждую элементарную дизъюнкцию представить в виде фразы Хорна.

*Пример.* Пусть предметная область описана в виде  $\{ \bar{A} \vee (B \ \& \ D), B \rightarrow C, A \vee D \}$ . Представим её в виде фраз Хорна.

$\bar{A} \vee (B \ \& \ D) \equiv (\bar{A} \vee B) \ \& \ (\bar{A} \vee D)$ . Этому высказыванию соответствует две фразы Хорна  $(\bar{A} \vee B)$  и  $(\bar{A} \vee D)$ .

$$B \rightarrow C \equiv \bar{B} \vee C .$$

$A \vee D$  – является фразой Хорна.

Итак, имеем предметную область, описанную фразами Хорна:

$$\{ \bar{A} \vee B, \bar{A} \vee D, \bar{B} \vee C, A \vee D \}^-$$

### 1.7. Примеры использования метода резолюций в логике высказываний

Метод резолюций применяется в качестве механизма доказательства при реализации принципа дедукции.

Для доказательства того, что некоторое заключение  $S$  является логическим следствием множества гипотез  $\{H_1, \dots, H_n\}$ , нужно применить резолюцию к множеству  $\{H_1, \dots, H_n, \neg S\}$ . Эти гипотезы и отрицание заключения должны иметь вид дизъюнкций.

В любом рассуждении в логике высказываний можно проверить, будет ли истинность следствия этого рассуждения определяться истинностью фигурирующих в нём высказываний. Если это имеет место в данном рассуждении, то говорят, что оно логически правильное.

Например, выясним, является ли логически правильным следующее простое рассуждение. Студент пойдёт домой ( $p$ ) или останется в университете ( $q$ ). Он не останется в университете. Следовательно, студент пойдёт домой. (Буквами обозначены имеющиеся в этом рассуждении простые высказывания).

Запишем это рассуждение символически с помощью указанных в скобках букв:  $p \vee q, \neg q, p$ . Истинность следствия будет определяться истинностью имеющихся высказываний,  $\{p \vee q, \neg q\} \models p$ .

Применим принцип дедукции:  $\{p \vee q, \neg q, \neg p\} \models 0$ .

Невыполнимость множества докажем с помощью резолюций:

1.  $p \vee q$ ,
2.  $\neg q$ ,
3.  $\neg p$ ,
4.  $p$  (1,2).
5. 0.(ЛОЖЬ)

Можно считать, что данное рассуждение логически правильное.

### **Контрольные задания**

1. Выяснить, являются ли логически правильными следующие рассуждения. Доказательство провести методом прямого вывода, методом «от противного».

2. Выразить описание задачи через фразы Хорна и провести доказательства, используя метод резолюций.

1. Или Пётр и Иван братья, или они однокурсники. Если Пётр и Иван братья, то Сергей и Иван не братья. Если Пётр и Иван однокурсники, то Иван и Михаил также однокурсники. Следовательно или Сергей и Иван не братья, или Иван и Михаил однокурсники.

2. Если Петр не встречал Ивана, то либо Иван не был на лекциях, либо Пётр лжёт. Если Иван был на лекциях, то Пётр встречал Ивана, и Сергей был в читальном зале после лекций. Если Сергей был в читальном зале после лекций, то либо Иван не был на лекциях, либо Пётр лжёт. Следовательно, Иван не был на лекциях.

3. Наша футбольная команда либо выигрывает матч, либо проигрывает, либо сводит его к ничьей. Если матч выигран или проигран, то он не перенесён. Команда матч не выиграла и не свела его к ничьей. Следовательно, матч не перенесён и проигран

4. Если Джон не встречал этой ночью Смита, то либо Джон был убийцей, либо Джон лжет. Если Смит не был убийцей, то Джон не встречал Смита этой ночью, и убийство имело место после полуночи. Если же убийство имело место после полуночи, то либо Смит был убийцей, либо Джон лжет. Следовательно, Смит был убийцей.

5. Известно, что хроничные сепульки всегда латентны или бифуркальны.

Какие из следующих утверждений в этом случае истинны:

а) сепульки не хроничны только в случае отсутствия у них свойства латентности;

б) латентность сепулек не является необходимым условием их хроничности или бифуркальности;

- с) хроничность сепулк является достаточным условием их латентности или бифуркальности;
- д) для нехроничности сепулк необходимо отсутствие у них как бифуркальности, так и латентности.

### 1.8. Непротиворечивость аксиом

Множество аксиом  $H_1, H_2, \dots, H_m$  называется *непротиворечивым*, если найдётся такой набор истинностных значений входящих в него элементарных высказываний, на котором все аксиомы истины. Иначе множество аксиом *противоречиво*.

Приведенное в примере 1 множество аксиом непротиворечиво, так как на наборе значений, где  $A=T, B=F, C=T$  и  $D=T$ , каждая аксиома принимает значение "истина".

*Противоречием* называется высказывание, которое ложно во всякой предметной области. Противоречие будем обозначать как  $A \& \bar{A}$  (это высказывание является и простейшим примером противоречия) или как 0. Для более сложных высказываний проверку на то, является ли высказывание противоречием, проверяется так же, как высказывания на общезначимость, через построение таблицы. Значение функции в этом случае должно быть равным F.

Если множество аксиом противоречиво, то высказывание  $A_1 \& A_2 \& \dots \& A_m$  будет противоречием.

Каждый раз, когда в экспертной системе строится описание предметной области, его проверяют на непротиворечивость. Непротиворечивость достигается через уточнение высказываний.

Кроме проверки множества аксиом на непротиворечивость, возникает задача проверки это множество на *достоверность*.

Пусть, например, в качестве аксиом выступают свидетельства людей, причастных к преступлению, и необходимо выявить, кто является преступником. Возникает вопрос, насколько можно доверять этим свидетельствам? Здесь



можно использовать такой приём. Будем считать, что свидетельства людей, не совершивших преступление, истинны, а свидетельства преступников – ложны. Тогда каждое свидетельство породит две аксиомы, имеющие вид импликаций: ЕСЛИ А невиновен ТО его свидетельство верно, и ЕСЛИ А преступник ТО его свидетельство – ложно.

### 1.9. Аксиоматизация логики высказываний

Любая математическая система основывается на множестве аксиом, т.е. выражений, считающихся общезначимыми и множестве правил вывода, т.е. механизмов, позволяющих строить новые общезначимые выражения. Такие выражения называют *теоремами*. Доказательством теорем называется последовательность из аксиом, правил вывода и уже доказанных теорем, позволяющих получить новую теорему. Важно, что логические правила, которые используются для вывода новых теорем из аксиом и ранее доказанных в данной системе теорем, не порождали в качестве «теорем» ложные высказывания.

Рассмотрим предметную область, включающую все возможные высказывания. Определим множество аксиом, определяющих эту область. Такими вопросами занимается область матлогики, называемая *исчислением высказываний*.

Необходимо предложить такие формализмы, которые бы определяли все процедуры и не требовали дополнительно никаких ссылок на смысловое содержание. В вышеприведённых примерах мы решали задачу вывода исходя из того, что известны понятия И, ИЛИ, ЕСЛИ ТО и др., которые использовались при выводе. Так, если аксиома определена как  $A \& B$ , то, исходя из смысла этой операции, выводилась истинность высказываний  $A$  и  $B$ . В исчислении высказываний операция И определяется явно в виде двух аксиом:  $(A \& B) \rightarrow A$ ,  $(A \& B) \rightarrow B$ . Это позволяет организовать вывод, не прибегая к рассмотрению смысла фраз.

*Силлогизмы* – правильные схемы рассуждений, в которых заключение верно в силу именно *формы* рассуждения, а не *содержания*.

Правильным умозаключением называется такое умозаключение, значение которого истинно всякий раз, когда истинны его гипотезы. Правила вывода являются правильными умозаключениями или силлогизмами. Силлогизм записывается в виде:

$$\frac{H_1, H_2, \dots, H_n}{C}$$

гипотезы  
заключение

Гипотезы представляют собой перечень высказываний или посылок. Умозаключение правильно, если всякий раз, когда  $H_1, H_2, \dots, H_n$  истинны, то истинно и  $C$ . Правильность умозаключения можно проверить, построив таблицу истинности и показать, что всякий раз, когда гипотезы истинны, истинно и заключение.

Таблица 1.3

Силлогизм	Название силлогизма
$\frac{P \rightarrow Q, P}{Q}$	<i>Modus Ponens</i> (способ спуска или правило отделения)
$\frac{P \rightarrow Q, \neg Q}{\neg P}$	<i>Modus Tollens</i> (доказательство от противного)
$\frac{P \rightarrow Q, Q \rightarrow R}{P \rightarrow R}$	Транзитивность импликации
$\frac{P \vee Q, \neg P}{Q}$	Дизъюнктивный силлогизм
$\frac{P \vee Q, P \rightarrow (R \& \neg R)}{Q}$	Исключающий выбор

Продолжение таблицы 1

$\frac{P \rightarrow Q, R \rightarrow Q, P \vee R}{Q}$	Простая конструктивная дилемма
$\frac{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, P \vee R}{Q \vee S}$	Сложная конструктивная дилемма
$\frac{P \rightarrow Q, P \rightarrow S, \neg Q \vee \neg S}{\neg P}$	Простая деструктивная дилемма
$\frac{P \rightarrow Q, R \rightarrow S, \neg Q \vee \neg S}{\neg P \vee \neg R}$	Сложная деструктивная дилемма
$\frac{\neg P \rightarrow (R \& \neg R)}{P}$	Сведение к абсурду

Рассмотрим пример использования правила вывода *Modus Ponens* .

Пусть P и Q заданы следующим образом: P– «А является студентом УГТУ-УПИ», Q– «А посещает занятия»,

так что  $P \rightarrow Q$ : если А студент УГТУ-УПИ, то А посещает занятия.

Предположим, А – Петров Василий, и он посещает занятия. Нужно показать, что он – студент УГТУ-УПИ.

Правило *Modus Ponens* даёт

$\frac{P \rightarrow Q, P}{Q}$	Если А студент УГТУ-УПИ, то А посещает занятия , А посещает занятия, значит А – студент УГТУ-УПИ.
--------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------

Рассуждения, построенные по схеме силлогизмов, правильны именно в силу своей структуры. Рассмотрим пример формального доказательства правильности умозаключения

$$P \rightarrow Q, \neg R \rightarrow \neg Q, \neg R$$

---


$$\neg P$$

Доказательство:

1.  $P \rightarrow Q$  – гипотеза;
2.  $\neg R \rightarrow \neg Q$  – гипотеза;
3.  $\neg R$  – гипотеза;
4.  $\neg Q$  – 2, 3, правило *Modus Ponens*;
5.  $\neg Q \rightarrow \neg P$  – 1 и Закон контрапозиции:  $P \rightarrow Q \equiv \neg Q \rightarrow \neg P$ ;
6.  $\neg P$  – 4, 5 и правило *Modus Ponens*.

### **Контрольные задания**

Определите, какое из перечисленных умозаключений является правильным:

a)  $\neg P \vee Q, \neg P \vee S, \neg S$

---


$$\neg P$$

b)  $\neg P \vee \neg Q, R \vee \neg Q, \neg P$

---


$$R \vee \neg P$$

c)  $P \rightarrow Q, P \rightarrow S, Q \vee S$

---


$$P$$

d)  $\neg(S \& T), \neg Z \rightarrow T$

---


$$S \rightarrow Z$$

e)  $P \rightarrow Q, \neg R \rightarrow \neg Q, \neg R$

---


$$\neg P$$

f)  $\neg P \vee Q, R \vee \neg Q, P, S$

---


$$R \vee S$$

g)  $S \vee T, T \rightarrow R, S \rightarrow Z,$

---


$$R \vee Z$$

## 2. Исчисление предикатов

### 2.1 Предикаты

Логика высказываний позволяет формализовать лишь малую часть множества рассуждений. Высказывания, описывающие некоторые свойства объектов, или отношения между объектами выходят за рамки логики высказываний. Например, мы не сможем судить о логической правильности такого простого рассуждения: «Каждое натуральное число является корнем некоторого квадратного уравнения. Число 5 – натуральное. Следовательно, 5 является корнем некоторого квадратного уравнения».

Логика предикатов начинается с анализа строения высказываний, которые выражают тот факт, что объекты обладают некоторыми свойствами, или находятся между собой в некоторых отношениях. Понятие «свойства» и понятие «отношения» рассматриваются как частный случай общего понятия «предиката». Объекты, о которых говорится в высказывании, называются терминами или *предметными константами*.

*Предметные константы*, подобно константам в математике, определяют значения, которые могут быть приписаны в высказываниях *предметным переменным*. При этом каждой переменной соответствует своё множество предметных констант. Например, если речь идет о студенческой группе, то переменной ФАМИЛИЯ соответствует множество констант – конкретных фамилий студентов группы, переменной ОЦЕНКА – множество констант {отл., хор., удовл., неуд.}, переменной ВУЗ – множество имен ВУЗов. Над переменными и константами определяются *функции* так же, как и в математике, т.е. как однозначное отображение декартова произведения  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_m \Rightarrow Y$ , где  $X_i$  и  $Y$  – имена предметных переменных.

Пример функции  $F: X_1 \times X_2 \Rightarrow Y$ , где  $X_1$  – вес товара,  $X_2$  – его цена, а  $Y$  – стоимость, которая определяется как  $Y = X_1 \cdot X_2$ .

*Определение.* Предикатом называется функция, аргументы которой принимают значения из некоторого множества, а сама функция – значение 0 («ложь») или 1 («истина»).

Пример предиката: ФАМИЛИЯ = «Петров». Здесь ФАМИЛИЯ – переменная, «Петров» – константа.

Предикаты, в которых описывается некоторое свойство объекта, называется предикат-свойство. Если предикат определяет отношение между несколькими объектами, то такой предикат называется предикат-отношение. В зависимости от того, между скольким числом объектов устанавливаются отношения, различают двуместные, трёхместные и  $n$ -местные отношения

Предикат называется  $n$ -местным ( $n = 1, 2 \dots$ ), если соответствующая функция есть функция от  $n$ -аргументов. Высказывание – не что иное, как предикат без аргумента, или предикат с нулевым числом мест.

*Примеры.*

1. Бинарные предикаты:  $x, y, z \in \mathbb{N}$ ,  $P(x, y) = (x > y)$ ,  $R(x, y) = (x = y^2)$ ,  $Q(x, y) =$  « $x$  делит  $y$ »;

2. Трёхместные:  $P(x, y, z) =$  «число  $x$  является НОД (наибольший общий делитель) чисел  $y$  и  $z$ »,  $R(x, y, z) = (z = x + y)$ .

Предикатную функцию  $P(x, y)$  можно рассматривать как функцию, определённую на декартовом квадрате  $\mathbb{N}^2$ . Множество тех пар  $(x, y)$  для которых данная функция принимает значение истины, есть область истинности предиката  $P(x, y)$ . Табличную запись функции называют *матрицей* предиката.

## 2.2. Применение логических связок

Так как предикаты принимают значения из  $\{T, F\}$ , то они являются высказываниями, и их можно объединять логическими связками, получая более сложные предикатные функции.

Пусть  $R(x)$  и  $E(x)$  – два одноместных предиката, определённых на некотором множестве  $M$ .

*Конъюнкция.*  $P_1(x) \equiv R(x) \& E(x)$  – это предикат, который истинен для тех и только для тех объектов из  $M$ , для которых оба предиката истинны. Таким образом, область истинности предиката  $P_1(x)$  равна пересечению областей истинности предикатов  $R(x)$  и  $E(x)$ .

*Дизъюнкция.*  $P_2(x) \equiv R(x) \vee E(x)$  – это предикат, который ложен для тех и только для тех объектов из  $M$ , для которых оба предиката ложны. Таким образом, область истинности предиката  $P_2(x)$  равна объединению областей истинности предикатов  $R(x)$  и  $E(x)$ .

*Отрицание.*  $P_3(x) \equiv \neg R(x)$  – это предикат, который истинен для тех и только для тех объектов из  $M$ , для которых предикат  $R(x)$  ложен. Его область истинности является дополнением области истинности предиката  $R(x)$ .

Операции логики над многоместными предикатами определяются аналогично. Необходимо следить, какие переменные определяются одинаковыми буквами, а какие разными. Пусть имеется два предиката  $R(x, y)$  и  $Q(x, y)$ , определённых на множестве  $M$ . Тогда предикат  $P(x, y, z) \equiv R(x, y) \& Q(y, z)$  – некоторый трёхместный предикат от  $x, y, z$ . Чтобы определить для каких значений предикат  $P(x, y, z)$  принимает истинные значения, а для каких ложные, необходимо произвести *унификацию* переменных, то есть присвоить переменным некоторые конкретные значения из множества  $M$ .

Пусть  $x = a, y = b, z = c$ , где  $a, b, c \in M$ ,

$P(a, b, c) \equiv R(a, b) \& Q(b, c)$ .

Предикат  $P(a, b, c) = 1$ , когда  $R(a, b) = 1$  и  $Q(b, c) = 1$ .

Пример. (ФАМИЛИЯ = «Петров») & (ВУЗ = «УГТУ») & (1 < КУРС < 4). Это сложное высказывание будет истинным для студента УГТУ 2-го или 3-го курса с фамилией Петров. Для всех остальных студентов значения предиката будет «ложь».

Введение переменных и функций позволяет более подробно описывать предметную область, чем при описании через элементарные высказывания, смысл которых нам был неважен. Но если там решение можно было найти перебором истинностных значений элементарных высказываний, то перебор по всевозможным значениям предметных переменных становится часто невозможным, поэтому требуются другие методы поиска решений.

### Контрольные задания

Постройте матрицы предикатов на множестве натуральных чисел:

1.  $P(x, y) = \langle x - \text{простое число} \rangle \ \& \ \langle y - \text{чётное число} \rangle$ .
2.  $P(x, y) = (2 * x = y^2)$ .
3.  $P(x, y) = (x + y = 6)$ .
4.  $P(x, y) = (x + y = 4)$ .
5.  $P(x, y) = (x / y = y / x)$ .
6.  $P(x, y) = (x + y = 2 * y)$ .

### 2.3. Кванторы

Предикатам могут быть приписаны кванторы. Естественный язык содержит огромное число кванторов.

Выражения: «каждому», «для всех» и т.п. служат примером КВАНТИФИКАЦИИ, которая состоит из квантора. Именно кванторы делают теорию предикатов гибкой и богатой.

Кванторы: общности  $\forall$  (читается как «для всех»);

существования  $\exists$  (читается как «существует»).

$\forall(x) P(x)$ ,  $x \in M$ . Если множество  $M$  состоит из конечного числа объектов  $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ , то значение истинности предиката с квантором общности  $\forall(x) P(x)$  записывается в виде конъюнкции.  $P(a_1) \ \& \ P(a_2) \ \& \ P(a_3) \ \& \ \dots \ \& \ P(a_n)$ .



$\exists(x) P(x)$ ,  $x \in M$ . Если множество  $M = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$ , то значение истинности предиката с квантором существования  $\exists(x) P(x)$  совпадает со значением дизъюнкции.  $P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee \dots \vee P(a_n)$ .

Итак, квантор общности обобщает операцию конъюнкции, квантор существования обобщает операцию дизъюнкции.

Поскольку в формулы введены новые объекты-кванторы, необходимо установить связь их с другими объектами формул.

Первое, что мы сделаем, установим связь кванторов с одноместным оператором отрицания.

Нетрудно убедиться, что имеют место следующие тождества, носящие название законов де Моргана.

$$\neg \forall (x) (P(x)) \equiv \exists(x) (\neg P(x));$$

$$\neg \exists x P(x) \equiv \forall (x) (\neg P(x)).$$

### **Контрольные задания**

Определить связь между квантификацией переменных и связкам И и ИЛИ, то есть определить как связаны между собой следующие выражения.

1.  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$  и  $(\forall x P(x) \vee \forall x Q(x))$ .
2.  $\forall x (P(x) \& Q(x))$  и  $(\forall x P(x) \& \forall x Q(x))$ .
3.  $\exists x (P(x) \vee Q(x))$  и  $(\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$ .
4.  $\exists x (P(x) \& Q(x))$  и  $(\exists x P(x) \& \exists x Q(x))$ .

### **2.4. Свободные и связанные переменные**

Переменные в логике играют роль, аналогичную их роли в алгебре или анализе. Они позволяют указать в структуре объекта те места, которые при использовании этого объекта будут заняты другими объектами. Переменная в области действия квантора играет роль обычной переменной и называется *связанной*, поэтому говорят, что кванторы связывают переменные.

*Пример.*  $\forall x ((x+1)(x-1) = (x^2-1))$ . Здесь переменная  $x$  является связанной.

Вне действия квантора переменная называется *свободной* и играет роль неизвестного.

*Пример.*  $(x^2 + 4x + 4 = 0)$ . Этот предикат определяет множество значений переменной  $x$ , при котором он истинен.

$\forall x P(x, y)$ , здесь  $x$  – связанная переменная,  $y$  – свободная переменная.

Для лучшего понимания различия между связанной и свободной переменной рассмотрим следующий пример: в выражении  $\sum_{n=1}^K a_n$  переменная  $n$  является связанной, а переменная  $K$  – свободной; вместо  $n$  в этом выражении никакое значение не подставляется: не имеют смысла выражения  $\sum_{n=1}^K a_8$ ,  $\sum_{8=1}^K a_n$ . Напротив, выражение  $\sum_{n=1}^8 a_n$  – осмысленно. Таким образом, предикат  $\forall x_i P(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ , не зависит от переменной  $x_i$ , при получении какого-либо значения предиката вместо  $x_i$  никакое значение не подставляется.

Область действия некоторой квантификации (или квантора) есть формула, к которой применяется эта квантификация. Формула, не содержащая свободных переменных, называется *замкнутой*.

Квантификация превращает  $n$ -местный предикат в  $(n - 1)$ -местный.

Если  $R(x)$  – одноместный предикат на некотором множестве  $M$ , то  $\forall(x) R(x)$  – нульместный предикат или УНИВЕРСАЛЬНОЕ высказывание,  $\exists(x) R(x)$  – ЭКЗИСТЕНЦИОНАЛЬНОЕ высказывание.

*Пример.* Пусть  $A(x, y)$  – некоторый двухместный предикат, определённый на множестве из пяти элементов:  $M = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ .

Предикатная функция задана матрицей:

$x \backslash y$	$a_1$	$a_2$	$a_3$	$a_4$	$a_5$
$a_1$	T	T	T	T	T
$a_2$	F	F	F	F	T
$a_3$	T	F	T	T	T
$a_4$	T	T	T	T	F
$a_5$	T	T	T	T	F

В результате применения квантификации можно получить четыре одно-местных предиката.

$x$	$\forall(y) A(x, y)$	$y$	$\forall(x) A(x, y)$	$x$	$\exists(y) A(x, y)$	$y$	$\exists(x) A(x, y)$
$a_1$	T	$a_1$	F	$a_1$	T	$a_1$	T
$a_2$	F	$a_2$	F	$a_2$	T	$a_2$	T
$a_3$	F	$a_3$	F	$a_3$	T	$a_3$	T
$a_4$	F	$a_4$	F	$a_4$	T	$a_4$	T
$a_5$	F	$a_5$	F	$a_5$	T	$a_5$	T

Если к оставшейся свободной переменной применить квантор, то одно-местные предикаты превратятся в высказывания:

$$\begin{aligned} \exists(x) \forall(y) A(x, y) &= T & \exists(y) \forall(x) A(x, y) &= F \\ \forall(x) \exists(y) A(x, y) &= T & \forall(y) \exists(x) A(x, y) &= T \end{aligned}$$

Порядок применения разноимённых кванторов существенен и может привести к различным высказываниям.

Примеры.

1. Пусть предикат  $D(x, y) = \langle\langle x \text{ делит } y \rangle\rangle$ , определенный на множестве натуральных чисел. Предикат  $\forall(x) \exists(y) D(x, y)$  означает, что для всякого  $x$  существует такое  $y$ , что  $x$  делит  $y$ . И это утверждение истинно. Если кванторы поменять местами, то получится  $\exists(y) \forall(x) A(x, y)$  – и этот предикат означает, что существует такое число  $y$ , что любое  $x$  его делит. И это утверждение ложно.

2. Определим предикат  $Mother(x, y) = \langle y \text{ мать для } x \rangle$ , определенный на множестве людей. Тогда  $\forall (x) \exists (y) Mother(x, y)$  означает, что у каждого человека есть мать. Предикат с другим порядком кванторов  $\exists (y) \forall (x) Mother(x, y)$  означает ложное утверждение, что существует мать всех людей.

### Контрольные задания

Для построенных в п. 2.2. матриц предикатов, найти значения всевозможных предикатов с квантификациями.

## 2.5. Предикатные формулы

Рассматривается предметная область, в которой множеством служит множество всех предикатов. Этот раздел матлогики называется *исчислением предикатов*. Так же, как и в исчислении высказываний, здесь выявляется множество аксиом, позволяющих проводить выводы в любой предметной области, не прибегая к смыслу высказываний, опираясь только на сформулированные в исчислении формализмы.

Исчисление предикатов является расширением исчисления высказываний.

Если  $S(A_1, \dots, A_n)$  – общезначимая схема исчисления высказываний, то она является также общезначимой схемой исчисления предикатов.

*Пример.* Схема исчисления высказываний:  $\neg\neg A \equiv A$  общезначима, следовательно справедлива формула:  $(\neg\neg\forall xP(x) \equiv \forall xP(x))$ .

Как и формулы исчисления высказываний, формулы исчисления предикатов делятся на три класса: общезначимые формулы (истины при всех интерпретациях), невыполнимые (ложны при всех интерпретациях), выполнимые (истины хотя бы при одной интерпретации).

*Определение 1.* Пусть  $P(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – некоторый  $n$ -местный предикат на некотором множестве  $M$ . Этот предикат называется:

- а. общезначимым (тождественно-истинным), если для любого набора значений аргументов его значение равно истине;

*b.* тождественно–ложным, если для любого набора значений аргументов, его значение равно ложь;

*c.* выполнимым, если существует хотя бы один набор значений аргументов, для которых его значение равно истина.

Пример тождественно-ложного предиката:

$$Q(x) = \left( \begin{cases} 8 + x = 5 \\ 8 - x = 1 \end{cases} \right)$$

*Определение 2.* Пусть  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  – два  $n$ -местных предиката от одних и тех же переменных, заданных на одном и том же множестве. Предикат  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  называется следствием предиката  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , если для любого набора переменных, на которых предикат  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  является истинным, предикат  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  также истинен.

Следствие обозначается как  $R(x_1, x_2, \dots, x_n) \Rightarrow Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Пример.  $x \in \mathbb{N}$ ,  $R(x) = \langle\langle x \text{ делится } 6 \rangle\rangle$ ,  $Q(x) = \langle\langle x \text{ делится на } 3 \rangle\rangle$

$R(x) \Rightarrow Q(x)$ , но не наоборот.

*Теорема.* Предикаты  $R(x_1, x_2, \dots, x_n)$  и  $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$  равносильны тогда и только тогда, когда каждый из них есть следствие другого.

Формулы  $A$  и  $B$  называются *равносильными* на множестве  $M$ , если при любой замене имеющихся в них простых формул на предикаты на множестве  $M$  эти формулы превращаются в равносильные предикаты.

## 2.6. Предварённая нормальная форма

В логике высказываний были введены две нормальные формы: конъюнктивная и дизъюнктивная. Приведение формулы логики высказываний к одной из этих форм позволяет упростить алгоритмы доказательства выполнимости и общезначимости. По аналогичным причинам вводится нормальная форма и в исчислении предикатов.

*Определение.* Предварённой формой называется формула, состоящая из высказываний, перед которыми стоит префикс, т.е. некоторая конечная последовательность квантификаций. Внутри высказываний кванторов нет.

Таким образом, предваренная формула имеет вид:

$$K_1 K_2 \dots K_n A,$$

где  $K_i$  – обозначает либо  $\forall$ , либо  $\exists$ , для  $i = 1, \dots, n$  и  $A$  – формула, не содержащая квантификаций.

*Теорема.* Для любой логической формулы существует логически эквивалентная ей предварённая нормальная форма.

Этапы получения предварённой формы.

Исключить связки эквивалентности и импликации.

Переименовать (если необходимо) связанные переменные таким образом, чтобы никакая переменная не имела бы одновременно свободных и связанных вхождений.  $\forall x A(x) \equiv \forall t A(t)$   $x, t \in M$ .

Удалить те квантификации, область действия которых не содержит вхождений квантифицированной переменной.

Преобразовать все вхождения отрицания, состоящие непосредственно перед атомами.

Переместить все квантификации в начало формулы. Для этого используется правила:

$$(\forall x A \ \& \ \forall x B) \equiv \forall x (A \ \& \ B),$$

$$(\forall x A(x) \ \& \ B) \equiv \forall x (A(x) \ \& \ B), \text{ если } B \text{ не содержит } x,$$

$$(A \ \& \ \forall x B(x)) \equiv \forall x (A \ \& \ B(x)), \text{ если } A \text{ не содержит } x,$$

$$(\exists x A(x) \ \& \ B) \equiv \exists x (A(x) \ \& \ B), \text{ если } B \text{ не содержит } x,$$

$$(A \ \& \ \exists x B(x)) \equiv \exists x (A \ \& \ B(x)), \text{ если } A \text{ не содержит } x.$$

Замечание. Одна формула может допускать много эквивалентных предварённых форм. Вид результата зависит от порядка применения правил, а также от произвола при переименовании переменных.

*Пример.* Найдём предварённую нормальную форму для формулы:

$$\begin{aligned} \forall x [P(x) \& \forall y \exists x (\neg Q(x, y) \rightarrow \forall z R(a, x, y))] &\equiv \forall x [P(x) \& \forall y \exists x ((Q(x, y) \vee \\ R(a, x, y))] &\equiv \forall x [P(x) \& \forall y \exists t (Q(t, y) \vee R(a, t, y))] \equiv \forall x [P(x) \& \forall q \exists t (Q(t, q) \vee R(a, t, \\ q))] &\equiv \forall x \forall q \exists t [P(x) \& (Q(t, q) \vee R(a, t, q))]. \end{aligned}$$

### **Контрольное задание.**

Найти предварённую нормальную форму для следующих формул.

1.  $P(x) \vee (\forall x Q(x, z) \& \forall y R(y, z))$ ;
2.  $\forall x (Q(x, z) \rightarrow R(x, t)) \vee \forall y \exists t (P(y, t) \sim S(y))$ ;
3.  $\forall x (P(x, z) \Leftrightarrow Q(x, z)) \rightarrow \exists x \exists z (R(x, z) \rightarrow S(x, z))$ .

## **2.7. Сколемовская и клаузальная формы**

Для того, что бы легче и эффективнее было доказывать невыполнимость формулы или некоторого их множества, устанавливают ещё более строгие пределы использования механизма квантификации. Каждой формуле  $A$  сопоставляется некоторая формула  $SA$  с гарантией, что формулы либо обе выполнимы, либо обе невыполнимы.  $(SA \supset A)$ . Форма  $SA$  называется *сколемовской* формой для соответствующей формулы  $A$ .

Сколемовская форма – это такая предварённая форма, в которой исключены кванторы существования.

Сколемовское преобразование (исключение  $\exists$ -квантификации):

- сопоставить каждой  $\exists$ -квантифицированной переменной список  $\forall$ -квантифицированных переменных, предшествующих ей, а также некоторую ещё не использованную функциональную константу, число мест у которой равно мощности списка.

- в матрице формулы заменить каждое вхождение каждой  $\exists$ -квантифицированной переменной на некоторый терм. Этот терм является функциональной константой со списком аргументов, соответствующих предшествующим  $\forall$ -квантифицированным переменным и называется сколемовской функцией.

- устранить из формулы все  $\exists$ -квантификации.

*Пример 1.* Пусть формула имеет вид:

$$\exists u \forall v \exists w \forall x \forall y \exists z M(u, v, w, x, y, z).$$

Ей соответствует сколемовская форма:

$$\forall v \forall x \forall y M(a, v, f(v), x, y, g(v, x, y))$$

где  $w$  заменена на  $f(v)$  и  $z$  – на  $g(v, x, y)$  – сколемовские функции.

*Пример 2.* Найти сколемовскую форму и сколемовские функции для предикатной формулы  $\forall x \forall y \exists z \exists w \forall t (\neg S(x, y, y) \rightarrow (S(z, v, x) \& P(w, t, t)))$ , если  $S(x, y, z) = (x+y = z)$ ,  $P(x, y, z) = (x*y = z)$  – предикаты суммы и произведения соответственно.

*Решение:*

1) преобразование импликации:

$$\forall x \forall y \exists z \exists w \forall t (S(x, y, y) \vee (S(z, v, x) \& P(w, t, t))),$$

2) Выполним сколемовское преобразование, пусть  $z = f(x, y)$ ,  $w = g(x, y)$

$$S_A: \forall x \forall y \forall t (S(x, y, y) \vee (S(f(x, y), g(x, y), x) \& P(g(x, y), t, t))),$$

3) Найдём сколемовские функции:

$$f(x, y) + g(x, y) = x \text{ и } g(x, y) * t = t, \text{ следовательно } g(x, y) = 1 \text{ и } f(x, y) = 1 - t.$$

Клаузальной формой называется такая сколемовская форма, матрица которой является КНФ. Любая сколемовская форма допускает эквивалентную клаузальную форму.



## 2.8. Метод резолюций в логике предикатов

Не существует алгоритма, позволяющего распознать общезначимость, нейтральность или невыполнимость произвольной формулы исчисления предикатов. Такая теорема была доказана Алонзо Черчем в 1936 г., это связано с существованием бесконечного числа возможных интерпретаций для формул исчисления предикатов.

Для того чтобы, было возможно применить метод резолюций для определения выполнимости множества предикатов необходимо произвести операцию УНИФИКАЦИИ, то есть конкретизировать как область определения предиката, так и объекты всех предикатов заданного множества. Механизм унификации является основным механизмом при выполнении инструкций в логическом программировании. Алгоритм, описанный набором хорновских дизъюнктов и базирующийся на принципе резолюций, реализован в языках логического программирования.

## 2.9. Принцип логического программирования

В основе логического программирования лежит использование метода резолюций. Алгоритмические свойства некоторой функции можно представить множеством дизъюнктов и использовать метод резолюций для вычисления значений этой функции. Метод резолюций будет эффективен только в случае, если мы имеем множество хорновских дизъюнктов. Так как принципиальное отличие от общего алгоритма резолюций в том, что на каждом этапе некоторый объект (атом) удаляется из одного дизъюнкта то выполнение алгоритма всегда завершится, какая бы стратегия ни была принята. Если  $N$  – число атомов, первоначально присутствующих в множестве дизъюнктов (с учётом повторений), то цикл будет выполняться не более  $N$ -раз.

Таким образом, имеем процедурную интерпретацию хорновских дизъюнктов. Впервые представление процедуры в виде вывода следствий из хорновских дизъюнктов было реализовано в программном интерпретаторе Коваль-

ского. Он показал, что аксиома  $A$  если  $V_1$  и  $V_2$  и ... и  $V_n$  может рассматриваться в качестве процедуры рекурсивного языка программирования. В этом случае  $A$  – заголовок процедуры, а набор  $V_i$  – тело процедуры. Декларативное понимание: « $A$  истинно, если истины  $V_i$ ». Верно и следующее понимание: «для выполнения  $A$  следует выполнить  $V_1$  и  $V_2$  и ... и  $V_n$ ». При таком понимании процедура вывода хорновских дизъюнктов сводится к алгоритму унификации. Этот алгоритм обеспечивает основные операции с данными при изменении значений объектов (переменных), передачу параметров, выбор и создание данных.

Для фраз Хорна применяется новая запись, называемая контекстно-свободной грамматикой (КС-грамматикой). Например дизъюнкт  $\{\neg P \vee \neg R \vee \neg Q \vee S\}$  запишется как  $S :- P, R, Q$ . Такая запись читается: « $S$  истинно, если  $P$ ,  $R$  и  $Q$  истины». Все атомы рассматриваются как процедуры, а сам дизъюнкт является правилом.

Логическая программа – это множество аксиом и правил, задающих отношения между объектами. Вычисление логической программы является выводом следствий из программы. Логика языка ограничена хорновскими дизъюнктами и снабжена резолюцией как единственным правилом вывода.

### **Библиографический список**

1. Колмогоров, А.Н. Математическая логика: Учеб. пособие для студентов мат. специальностей вузов / А.Н. Колмогоров, А.Г. Драгалин. Моск. гос. ун-т им. М.В. Ломоносова. – М.: УРСС, 2004. – 240 с.
2. Андерсон, Д.А. Дискретная математика и комбинаторика: Пер. с англ./ Д.А. Андерсон – М.: Издательский дом «Вильямс», 2003 – 960 с.: ил.
3. Акимов, О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы. / О.Е. Акимов. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2001. – 352 с.: ил.
4. Лихтарников, Л.М. Математическая логика: Курс лекций. Задачник-практикум и решения: Учеб. пособие для студентов вузов, обучающихся по мат. спец. / Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. – СПб.: Лань, 1999. – 288 с.
5. Тей, А. Логический подход к искусственному интеллекту: от классической логики к логическому программированию: Пер. с франц. / А. Тей, П. Грибомон, Ж.М. Луи и др. – М: Мир, 1990. – 432 с.: ил.
6. Ершов, Ю.Л. Математическая логика: учеб. пособие / Ю.Л. Ершов, Е. А. Палютин. – 3-е изд., стер. – СПб. [и др.]: Лань, 2004. – 336 с.: ил.

**Учебное электронное текстовое издание**

Битюцкий Валерий Петрович  
Папуловская Наталья Владимировна

**МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА.  
ИСЧИСЛЕНИЯ ВЫСКАЗЫВАНИЙ  
И ПРЕДИКАТОВ**

Редактор  
Компьютерная верстка

*Н.В. Лутова*  
*Н.В. Лутова*

**Рекомендовано РИС ГОУ ВПО УГТУ-УПИ  
Разрешен к публикации 28.12.05.**

**Электронный формат – PDF  
Формат 60x90 1/8**

**Издательство ГОУ-ВПО УГТУ-УПИ  
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19  
e-mail: sh@uchdep.ustu.ru**

**Информационный портал  
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ  
<http://www.ustu.ru>**