Федеральное агентство по образованию
ГОУ ВПО «Уральский государственный технический университет – УПИ»

О.Л. Кузнецова, О.Я. Шевалдина

РЯДЫ

Учебное электронное текстовое издание
Подготовлено кафедрой «Анализ систем и принятия решений»
Научный редактор: доцент, канд. физ.-мат. наук С.А. Аникин

Сборник задач к проведению практических занятий и выполнению домашних заданий по разделу «Ряды» дисциплины «Математика» для студентов всех специальностей факультета экономики и управления и других экономических специальностей УГТУ-УПИ.

Содержит 30 вариантов индивидуальных заданий. Приведено подробное решение задач типового варианта. Включенные в пособие упражнения могут быть использованы в процессе аудиторной и самостоятельной работы студентов, при проведении контрольных работ, консультаций, собеседований и экзаменов.

Екатеринбург
2005

Варианты заданий

Вариант 1

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{2}{1\cdot7}+\frac{2}{3\cdot9}+\frac{2}{5\cdot11}+\frac{2}{7\cdot13}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,\ 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{4n^2+1}}{2n^2+3}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость знакопостоянных рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{3^{n-1}+n-1}$;   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2(3n+1)}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}$;   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^n}{3^n+n^3}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^{2n}}{(n+2)\ln(n+2)}$.
6. Разложить функцию $\frac{7}{12+x-x^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\sin^2 x$.
8. Вычислить $\ln 4$ с точностью до 0,001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{2,5}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{125+x^3}}$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)}$ с точностью 0,001.

Вариант 2

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{2\cdot 8}+\frac{1}{3\cdot 10}+\frac{1}{4\cdot 12}+\dots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n \ln\left(\frac{3n}{3n-1}\right)$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{1+5^{2n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{2^{n+1}(n^3+1)}$;

   c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+1)}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)\,2^{2n+1}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+2}{n\sqrt{n}}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n n^2}$.

6. Разложить функцию $\frac{x}{\sqrt{2-3x}}$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\operatorname{arctg} x$.

8. Вычислить $\frac{4}{5}\mathrm{e}$ с точностью до 0,001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,3} \mathrm{e}^{-2x^2}\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!\,n!}$ с точностью 0,00001.

Вариант 3

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{7\cdot 11}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,\,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n-3}\right)^n$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость знакопостоянных рядов:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n(n^2-1)}{n!}$;

   c) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n\sqrt{2}+1\right)\ln^2\left(n\sqrt{3}+1\right)}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+\sin^2 n}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^n}{1-n\cdot 5^n}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8}$.
6. Разложить функцию $\ln\left(6-4x+x^2\right)$ в ряд Тейлора по степеням $x-2$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\arcsin x$.
8. Вычислить $\sqrt[3]{e^2}$ с точностью до 0,001.
9. Вычислить интеграл $\int_0^{0,4}\frac{\ln(1+x/2)}{x}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n n!}$ с точностью 0,001.

Вариант 4

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\frac{2}{9\cdot 11}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}+2\right)^2}{4n}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+2)!}{2^n\left(3n+5\right)}$;

   c) $\sum\limits_{n=5}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\ln(n-3)}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)^4}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}\,\left(x+5\right)^n}{5^n}$.
6. Разложить функцию $2x\cos^2\frac{x}{2}-x$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.
8. Вычислить $\sqrt[3]{1{,}06}$ с точностью до 0,0001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0{,}1}\cos(100x^2)\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\,n!}$ с точностью 0,001.

Вариант 5

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{3}{5\cdot 8}+\frac{3}{8\cdot 11}+\frac{3}{11\cdot 14}+\frac{3}{14\cdot 17}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,\ 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2 \sin\frac{1}{n^2}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+\sqrt[3]{n}}{n^3+n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{10^n\,2n!}{(2n)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\ln(2n)}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^3}{(n+1)!}$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^2}\right)$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^{2n}}{n^4+5}$.

6. Разложить функцию $\frac{1}{\sqrt[3]{x^2-6x+36}}$ в ряд Тейлора по степеням $x-3$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\sin^3 x$.

8. Вычислить $2\sin 20^\circ$ с точностью до 0,001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+2x)}{x}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n+1)}{(2n)!\,n!}$ с точностью 0,001.

Вариант 6

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{6}{4\cdot 7}+\frac{6}{7\cdot 10}+\frac{6}{10\cdot 13}+\frac{6}{13\cdot 16}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,\ 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\left(n+\sqrt[3]{n}\right)^3}{n^3-\sqrt{n}}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2+\sqrt[3]{n}}{n^3-\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\ldots(3n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots(2n+1)}$;

   c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ \ln\ln n}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2n+3}{3n+2}\right)^n$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+4)^n}{\left(2n^2+1\right)3^n}$.
6. Разложить функцию $(x-2)\sin 3x$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\frac{1}{1+x+x^2+x^3}$.
8. Вычислить $\sqrt[3]{29}$ с точностью до 0,001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\cos(4x^2)\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n(2n)!}$ с точностью 0,00001.

Вариант 7

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}+\frac{4}{13\cdot 18}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,\,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(2+\frac{1}{n^3}\right)$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+4n+7}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!}{10^n\,n^{10}}$;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\operatorname{arctg} n}}{1+n^2}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln n\,\ln\ln n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(n+2)^4}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^{2n-1}}{4^n(2n-1)}$.

6. Разложить функцию $\frac{6}{8+2x-x^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x+3$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\cos^3 x$.

8. Вычислить $\ln 3$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,2}\mathrm{e}^{-3x^2}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n!}$ с точностью 0,01.

Вариант 8

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{3}{2\cdot5}+\frac{3}{5\cdot8}+\frac{3}{8\cdot11}+\frac{3}{11\cdot14}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,\,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5}{n^2+4}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{2n}}{(2n-1)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+3)\ln^2(2n)}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 2n^2}{(n+2)^3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n 2^n}{(n+1)^3}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2(x-3)^n}{\left(n^2+1\right)^2}$.
6. Разложить функцию $\frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ в ряд Тейлора по степеням $x-4$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\frac{x^5}{1-x}$.
8. Вычислить $\cos 15^\circ$ с точностью до 0,0001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}}$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}$ с точностью 0,001.

Вариант 9

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{4}{1\cdot 5}+\frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{3\cdot 7}+\frac{4}{4\cdot 8}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\sqrt{n}+2}{2\sqrt[3]{n}+1}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\frac{1}{n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}$;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(2n+1)^{-n^2-n}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)\ln(n+1)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^4\operatorname{arctg}\frac{(-1)^n}{4^n}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3x^{2n}}{2n+1}$.
6. Разложить функцию $(3+\mathrm{e}^{-x})^2$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно $x+3$ функции $\frac{1}{(1-x)^2}$.
8. Вычислить $\sqrt[4]{20}$ с точностью до 0,001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1}\sin(100x^2)\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ с точностью 0,1.

Вариант 10

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2}{3\cdot 5}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{2}{7\cdot 9}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{\sqrt[3]{n^2}}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-\ln n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}\sqrt{n^2+5}}{(n+1)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+n}{1+n^2}\right)^2$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\sqrt[5]{n+5}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{2n+3}{2n-3}\right)^n$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-5)(x-2)^n}{\left(n^2+3\right)2^n}$.
6. Разложить функцию $x^2\sqrt{4-3x}$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно $x+1$ функции $(1+x)\ln(2+x)$.
8. Вычислить $\sin 0{,}4$ с точностью до 0,001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1}\frac{1-\mathrm{e}^{-2x}}{x}\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{7^n}$ с точностью 0,0001.

Вариант 11

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 9}+\frac{1}{9\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 15}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(1-\cos\frac{2\pi}{n}\right)$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^3+2}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}(n+1)!}{(2n)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2n\sqrt{\ln(3n-1)}}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{n^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n^{n+1}}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{(2n+1)\cdot 5^n}$.
6. Разложить функцию $2x\sin^2\frac{x}{2}-x$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.
7. Функцию $\ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по целым положительным степеням $x+1$.
8. Вычислить $\frac{1}{\sqrt[4]{e^5}}$ с точностью до 0,0001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1} e^{-6x^2}\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^n$ с точностью 0,01.

Вариант 12

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:

$$\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{5}{9\cdot 14}+\frac{5}{14\cdot 19}+\frac{5}{19\cdot 24}+\ldots.$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{arctg}\,\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3+7n}{5^n+n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{4^n\,(n+2)!}$;

c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{1}{(n-2)\sqrt{\ln(n-2)}}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n!}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\ln(2n+1)}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{2^n\,n^2}$.

6. Разложить функцию $\ln(30-10x+x^2)$ в ряд Тейлора по степеням $x-5$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Функцию $(1+x^2)\,\mathrm{arctg}\,x$ разложить по степеням x.

8. Вычислить $\ln 0{,}7$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,4}\cos\sqrt{x}\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n}{(2n-1)^2(2n+1)^2}$ с точностью 0,001.

Вариант 13

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{4\cdot 8}+\frac{4}{6\cdot 10}+\frac{4}{8\cdot 12}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\left(\mathrm{e}^{1/n}-1\right)^2$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,\sin\frac{2\pi}{2n+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n\sqrt[3]{n^2}}{(n+1)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n^2}{(n^3+1)\ln n}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cos\frac{\pi}{6n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{5n}{\left(\sqrt{5}\right)^n}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-2)^n}{5^n(2n+1)}$.

6. Разложить функцию $\frac{\sin 3x}{x}-\cos 3x$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.

7. Функцию $\frac{\ln(1+x)}{1+x}$ разложить по целым положительным степеням x.

8. Вычислить $\ln 5$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,6}\sqrt{1+x^3}\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{3^n}$ с точностью 0,1.

Вариант 14

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:
$$\frac{9}{2\cdot 11}+\frac{9}{5\cdot 14}+\frac{9}{8\cdot 17}+\frac{9}{11\cdot 20}+\dots.$$
Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n+\sin 2^n}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3n}{3^n+2n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(3n)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{n}{(n^2-2)\ln^2 n}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n\sqrt{n+1}}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}(x-2)^n$.

6. Разложить функцию $\left(2-e^x\right)^2$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.

7. Функцию $\ln\frac{1}{2+2x+x^2}$ разложить по целым положительным степеням $x+1$.

8. Вычислить $\sqrt[6]{68}$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\cos x^2\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n}{2^n}$ с точностью 0,1.

Вариант 15

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:

$$\frac{3}{1^2\cdot 2^2}+\frac{5}{2^2\cdot 3^2}+\frac{7}{3^2\cdot 4^2}+\frac{9}{4^2\cdot 5^2}+\ldots.$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n^2+3}{(n+1)(n+2)}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость знакопостоянных рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+7n}{7^n+5n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\ldots(3n-2)}{2^{n+1}\,n!}$;

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{(n^2+5)\ln n}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n\,n}{(\sqrt[4]{n}+1)^3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\,\operatorname{arctg}\frac{(-1)^n}{4n}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$.

6. Разложить функцию $\frac{1}{6-5x+x^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $x\operatorname{arctg}x$.

8. Вычислить $\ln 1{,}2$ с точностью до 0,001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\sin x^2\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}$ с точностью 0,0001.

Вариант 16

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:

$$\frac{8}{1\cdot 9}+\frac{8}{5\cdot 13}+\frac{8}{9\cdot 17}+\frac{8}{13\cdot 21}+\ldots .$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+5}{5^n+7}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n}}\cdot\sin\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!(2n+1)!}{(3n)!}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^2}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{(\sqrt{2n}+1)^5}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt{n}+10}{10^n}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^3(x+3)^{2n}}{2n-1}$.

6. Функцию $f(x)=x^4$ разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x+1$.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\ln(1+3x)$. Найти область сходимости полученного ряда.

8. Вычислить $\cos 10^\circ$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_{0}^{0,5} x^2 \operatorname{arctg} x\, dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{n^3(n+1)}$ с точностью 0,01.

Вариант 17

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:
$$\frac{12}{1\cdot 7}+\frac{12}{4\cdot 10}+\frac{12}{7\cdot 13}+\frac{12}{10\cdot 16}+\ldots.$$
Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{n}{\ln n}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:
   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt[3]{n}+3\right)^2}{2n+3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(n+1)!}{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}$;
   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:
   a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(2n)}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{3^n}{n^3}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-5)^n}{(n+4)\ln(n+4)}$.

6. Разложить функцию $\ln x$ в ряд Тейлора по степеням $x-1$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\sqrt{1+x^2}$.

8. Вычислить $\operatorname{arctg} 0{,}2$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^4\cos x^2\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n!(2n+1)}$ с точностью 0,001.

Вариант 18

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:

$$\frac{7}{6\cdot 13}+\frac{7}{13\cdot 20}+\frac{7}{20\cdot 27}+\frac{7}{27\cdot 34}+\ldots.$$

   Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3\,\mathrm{tg}^3\,\frac{\pi}{n}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(\mathrm{e}^{1/n}-1\right)^2$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n(2n-1)}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^{5/2}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\arcsin\frac{\pi}{\sqrt{2n+1}}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2+1)(x+1)^{2n}}{5^n}$.

6. Разложить функцию $3\cos^2 x-\sin^2 x$ в ряд Тейлора по степеням x, найти область сходимости полученного ряда.

7. Разложить в степенной ряд функцию $f(x)=x\arcsin x+\sqrt{1+x^2}$.

8. Вычислить $\cos 0{,}2$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(2n)!}$ с точностью 0,001.

Вариант 19

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 5}+\frac{1}{3\cdot 6}+\frac{1}{4\cdot 7}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}-1\right)^2}{n+\sqrt{n}}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^3 \operatorname{tg}^5 \frac{\pi}{n}$;   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!(2,7)^{n+1}}$;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\, \mathrm{e}^{-n^3}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{(n+1)!}$;   b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+7}$.

6. Разложить функцию $\frac{1}{\sqrt{x^2-6x+18}}$ ряд Тейлора по степеням $x-3$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $x \operatorname{arctg} x - \ln\left(1+x^2\right)$.

8. Вычислить $\sqrt[10]{1029}$ с точностью до 0,0001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$ с точностью 0,01.

Вариант 20

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда: $\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 8}+\frac{1}{8\cdot 10}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2+2}{n^2+1}\right)^n$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{2}{n}\right)$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdots(3n+2)}{2^n\,(n+1)!}$;

   c) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\,(\ln\ln n)^2}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n+1)(3/2)^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{\pi}{2\sqrt{n}}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^{2n}}{\sqrt{n+2}}\ln\left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)$.
6. Разложить функцию $\ln\left(x^2-9x+20\right)$ в ряд Тейлора по степеням $x-3$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $x^3\,\mathrm{e}^{-3x}$.
8. Вычислить $\sqrt[3]{640}$ с точностью до 0,0001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\sqrt{4+x^3}\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{3n^2}$ с точностью 0,01.

Вариант 21

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{2}{1\cdot3}+\frac{2}{2\cdot4}+\frac{2}{3\cdot5}+\frac{2}{4\cdot6}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\pi n}{n^2+1}$ сходящимся.

3. Исследоватьсходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\left(n^2-2\right)^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^{1/n}}{n^2}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^{10}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \arcsin\frac{\pi}{3^n}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{(n+1)!}\left(x+4\right)^{n+1}$.

6. Разложить функцию 2^x в ряд Тейлора по степеням $x+3$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^4}}$.

8. Вычислить $\operatorname{tg} 9^\circ$ с точностью до 0,001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{x}{1+x^5}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n$ с точностью 0,01.

Вариант 22

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0{,}005}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^n+n^2}{2^n+n^3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^2+1}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2 (n+1)^2}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2\mathrm{n}}\right)^n (x+1)^n$.
6. Разложить функцию $\sqrt{x}$ в ряд Тейлора по степеням $x-2$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\frac{2x-3}{x^2-3x+2}$.
8. Вычислить $\sqrt[4]{85}$ с точностью до 0,0001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,7} \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^2}}$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n^4+1}$ с точностью 0,0001.

Вариант 23

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{8}{1\cdot 9}+\frac{8}{9\cdot 17}+\frac{8}{17\cdot 25}+\frac{8}{25\cdot 33}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+5}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\sqrt[4]{n^3}\,\sqrt[5]{3n+4}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$;

   c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\left(4n^2-1\right)^2}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\sqrt[3]{n}}{n+3}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{\sin n}{n}\right)^2$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(3-x)^{2n}}{\sqrt{n}}$.
6. Разложить функцию $\frac{x+1}{x^2+2x+3}$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $x\sin^2 x$.
8. Вычислить $\frac{1}{\sqrt{e}}$ с точностью до 0,001.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^2\cos x^2\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^5-10}$ с точностью 0,0001.

Вариант 24

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:

$$\frac{5}{2\cdot 7}+\frac{5}{7\cdot 12}+\frac{5}{12\cdot 17}+\frac{5}{17\cdot 22}+\ldots .$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2+1}\right)^{n(n+1)}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n+\sqrt{n}}{2^n+\sqrt[5]{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^5}{2^n+3^n}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln^4 n}}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{\mathrm{e}^n}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(x-2)^{n-1}}{(n+1)!}$.

6. Разложить функцию $\sqrt[3]{x^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x+1$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $x\cos^2 x$.

8. Вычислить $\ln 1{,}25$ с точностью до 0,001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,4}\frac{dx}{\sqrt{1+x^3}}$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{5^n\, n!}$ с точностью 0,00001.

Вариант 25

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:

$$\frac{4}{2\cdot 6}+\frac{4}{6\cdot 10}+\frac{4}{10\cdot 14}+\frac{4}{14\cdot 20}+\ldots.$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^2\arcsin\frac{\pi}{2^n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^3(n+2)}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$; b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}-\sqrt[4]{n}}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^{n+1}}(x-3)^{n-1}$.

6. Разложить функцию $\sin\frac{\pi x}{4}$ в ряд Тейлора по степеням $x-2$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $x\ln\left(1+x^2\right)$.

8. Вычислить число e с точностью до 0,00001.

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^1 x^8 e^{-3x^2}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n(2n)!}$ с точностью 0,00001.

Вариант 26

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда:
$$\frac{9}{8\cdot 17}+\frac{9}{17\cdot 26}+\frac{9}{26\cdot 35}+\frac{9}{35\cdot 44}+\ldots.$$
Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\frac{\pi}{\sqrt{n}}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{n^6}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(2n+1)!}{3^n\,n!}$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(1/n)}{n^2}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:
a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-n)^n}{(2n)!}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n-\ln n}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x-3)^n\,\mathrm{tg}\,\frac{1}{\sqrt{n}}$.
6. Разложить функцию $\frac{1}{x^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x+2$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\left(5+\mathrm{e}^{-2x}\right)^2$.
8. Вычислить $\sqrt[4]{7}$ с точностью до 0,01.
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,2}\sqrt[3]{1+x^2}\,dx$ с точностью до 0,0001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n n^2}{5^n\,n!}$ с точностью 0,0001.

Вариант 27

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $2+\frac{1}{5}+\frac{1}{50}+\frac{1}{500}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.
2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+5^n}{n^{10}}$ сходящимся.
3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(\frac{5+\sqrt{n}}{3+\sqrt{n}}\right)$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)!\,n!}{(3n)!}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n+1}}$.
4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n\ln\ln n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{100}}{100^n}$.
5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}(x-2)^n$.
6. Разложить функцию $\frac{2x+1}{(x+1)^2}$ в ряд Тейлора по степеням $x-2$, найти область сходимости полученного ряда.
7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\ln\sqrt[3]{\frac{1+2x}{1-2x}}$.
8. Сколько нужно взять членов ряда $\mathrm{e}^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots$, чтобы найти число e с точностью до 0,0001?
9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,25}\ln\left(1+\sqrt{x}\right)dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.
10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2^n\,n!}$ с точностью 0,00001.

Вариант 28

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{4}{3\cdot 5}+\frac{4}{7\cdot 9}+\frac{4}{11\cdot 13}+\frac{4}{15\cdot 17}+\ldots$. Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{5^n}$; c) $\sum\limits_{n=4}^{\infty}\frac{n}{\left(n^2-9\right)^2}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{arctg} n}{\sqrt[3]{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\mathrm{e}^n}{n!}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{1}{n}(x-1)^n$.

6. Разложить функцию $\frac{2}{x}$ в ряд Тейлора по степеням $x+2$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\frac{x-2}{(x+1)^2}$.

8. Сколько нужно взять членов ряда $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots$, чтобы вычислить $\ln 2$ с точностью до 0,001?

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,5}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4^n\, n!}$ с точностью 0,00001.

Вариант 29

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}-\frac{1}{27}+...+\frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}+\cdots$.

   Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\operatorname{arctg}\frac{\pi}{4\sqrt{n}}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{(2n)!}$; c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[5]{\ln^7 n}}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{2^n(n-1)!}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt[3]{n^2+3}}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{\mathrm{n}^{\mathrm{n}}}(x-5)^n$.

6. Разложить функцию $\sin x$ в ряд Тейлора по степеням $x+\frac{\pi}{4}$, найти область сходимости полученного ряда.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $\sqrt[3]{1+x^2}$.

8. Сколько нужно взять членов ряда $\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\cdots$, чтобы вычислить $\cos 15°$ с точностью до 0,0001?

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,1}\frac{\ln(1+x)}{x}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2+2}$ с точностью 0,0001.

Вариант 30

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\ldots$.

   Вычислить частичные суммы S_n для $n=10, 100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S \approx S_n$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ сходящимся.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{10^n}{1000n+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{2}{n}\right)^n$; c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

   a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{(4n^2-1)^2}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg}\frac{\pi}{4n}$.

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n-1}}{n^n}$.

6. Разложить функцию $x^5-7x^4+3x^3-5x+4$ по степеням $x+3$.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции e^{-x^2}. Найти область сходимости полученного ряда.

8. При каких значениях x приближенная формула $\cos x \approx 1-\frac{x^2}{2}$ дает ошибку, не превышающую 0,001? 0,0001?

9. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0,2} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x^2}dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

10. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{5n^2+2}$ с точностью 0,0001.

Решение примеров типового варианта

1. Пользуясь определением, найти сумму ряда

$$\frac{5}{3\cdot 8}+\frac{5}{8\cdot 13}+\frac{5}{13\cdot 18}+\frac{5}{18\cdot 23}+\ldots .$$

Вычислить частичные суммы S_n для $n=10,100$. Для каждого случая найти абсолютную погрешность Δ_n и относительную погрешность δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$.

<u>Решение</u>. Найдем общий член ряда. Числа $3,8,13,\ldots$ образуют арифметическую прогрессию. По формуле $a_n=a_1+d(n-1)$ находим общий член этой прогрессии. Здесь $a_1=3,\quad d=5$, поэтому $a_n=5n-2$. Аналогично для арифметической прогрессии $8,13,18,\ldots$ ее общий член равен $5n+3$. Следовательно, n-й член данного ряда равен $\dfrac{5}{(5n-2)(5n+3)}$. Представим его в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{5}{(5n-2)(5n+3)}=\frac{(5n+3)-(5n-2)}{(5n-2)(5n+3)}=\frac{1}{5n-2}-\frac{1}{5n+3}.$$

Замечание. Для представления общего члена в виде суммы простейших дробей полезно использовать метод неопределенных коэффициентов.

Выпишем последовательность частичных сумм данного ряда и найдем ее предел:

$$S_1=a_1=\frac{1}{3}-\frac{1}{8},\ S_2=S_1+a_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{8}+\frac{1}{8}-\frac{1}{13}=\frac{1}{3}-\frac{1}{13},\ldots,$$

$$S_n=S_{n-1}+a_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{5n+3},\quad \lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5n+3}\right)=\frac{1}{3}.$$

Следовательно, ряд сходится, и его сумма $S=\dfrac{1}{3}$.

Найдем частичные суммы ряда для $n=10,\ 100$:

$S_{10}=\frac{1}{3}-\frac{1}{53}=\frac{50}{159}$, $S_{100}=\frac{1}{3}-\frac{1}{503}=\frac{500}{1509}$.

Абсолютные погрешности Δ_n и относительные погрешности δ_n приближённого равенства $S\approx S_n$, соответственно, равны:

$\Delta_{10}=\left|S-S_{10}\right|=\frac{1}{53}\approx 0{,}0189$, $\Delta_{100}=\left|S-S_{100}\right|=\frac{1}{503}\approx 0{,}0020$,

$\delta_{10}=\frac{\Delta_{10}}{S}\cdot 100\,\%=5{,}66\,\%$, $\delta_{100}=\frac{\Delta_{100}}{S}\cdot 100\,\%=0{,}60\,\%$.

2. Используя необходимое условие сходимости ряда, выяснить, является ли ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$ сходящимся.

<u>Решение</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)$ расходится, ибо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} n\left(e^{1/n}-1\right)=$

$=\lim\limits_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n}=1\neq 0$. Здесь мы воспользовались тем, что $e^{1/n}-1\sim\frac{1}{n}$ при $n\to\infty$.

3. Исследовать сходимость следующих рядов:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{n\,!}$;

c) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\beta} n}$; d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)\ln(n+2)}$.

<u>Решение</u>.

a) Подберем подходящий для сравнения эталонный ряд. Преобразуем формулу общего члена ряда: $a_n=\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=\sqrt{n}\,2\sin^2\frac{1}{2n}$. Так как $2\sqrt{n}\,\sin^2\frac{1}{2n}\sim 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n}\right)^2=\frac{1}{2n^{3/2}}$ при $n\to\infty$, то в качестве эталонного ряда рассмотрим обобщенный гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$. Обозначим $b_n=\frac{1}{n^{3/2}}$.

Найдем $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right):\frac{1}{n^{3/2}}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n}\left(2\sin^2\frac{1}{2n}\right):\frac{1}{n^{3/2}}\right)=$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n}\right)^2:\frac{1}{n^{3/2}}\right)=\frac{1}{2}.$$

Предел конечен и отличен от нуля, условие предельного признака сравнения выполнено. Эталонный ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ сходится, значит, исходный ряд по предельному признаку сравнения тоже сходится.

b) В данном случае $a_n=\frac{\left(\sqrt{n}\right)^n}{n!}$. Имеем

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left(\sqrt{n+1}\right)^{n+1}n!}{(n+1)!\left(\sqrt{n}\right)^n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}=0\cdot\sqrt{e}=0<1.$$

По признаку Даламбера рассматриваемый ряд сходится.

c) Введем функцию $f(x)=\frac{1}{x\ln^{\beta}x}$. На промежутке $[2;+\infty)$ эта функция принимает положительные значения, а ее производная равна

$f'(x)=-\frac{\beta+\ln x}{x^2\ln^{\beta+1}x}$. Если $\beta+\ln x>0$, т.е. $x>e^{-\beta}$, то $f'(x)<0$.

Следовательно, $f(x)$ – положительная функция и убывает на промежутке $[a;+\infty)$, где $a=\max\left(2;e^{-\beta}\right)$. Рассмотрим несобственный интеграл:

$$\int_2^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_2^b \frac{dx}{x(\ln x)^{\beta}} = \left|\begin{matrix}\ln x = t, \\ dt = \dfrac{dx}{x}\end{matrix}\right| =$$

$$= \lim_{b\to+\infty}\int_{\ln 2}^{b} \frac{dt}{t^{\beta}} = \lim_{b\to+\infty} \left.\frac{t^{-\beta+1}}{-\beta+1}\right|_{\ln 2}^{b} = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\ln 2)^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Из последнего равенства видно, что данный интеграл сходится, если $\beta > 1$ и расходится, если $\beta \le 1$. Следовательно, исследуемый ряд сходится при $\beta > 1$ и расходится, при $\beta \le 1$.

d) В этом случае непосредственное применение интегрального признака нецелесообразно, т.к. вычисление несобственного интеграла может оказаться затруднительным. Сравним общий член данного ряда с общим членом ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$. Найдем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(3n+1)\ln(n+2)} = \lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{(3n+1)\ln\left(n\left(1+\frac{2}{n}\right)\right)} = \frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{\ln n + \ln\left(1+\frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{3}.$$ Так

как ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ расходится (см. предыдущий пример), то по предельному признаку сравнения исходный ряд также расходится.

4. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряды:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-3)^{n-1}}{3^n n^2+1}$; b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{2^n+n^3}$;

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$.

<u>Решение</u>.

a) Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов исходного ряда: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}$. Сравним его со сходящимся рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}:\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{3^n n^2}{3^n n^2\left(1+1\big/\left(3^n n^2\right)\right)}=\frac{1}{3}.$$

Предел конечен и отличен от нуля, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^{n-1}}{3^n n^2+1}$ ведет себя так же, как и ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, т.е. сходится. Следовательно, исходный ряд сходится, причем *абсолютно*.

b) Покажем, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{2^n+n^3}$ расходится.

Так как $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^{n-1}}{2^n+n^3}=\frac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{2^n\left(1+\frac{n^3}{2^n}\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+0}=\frac{1}{2}\neq 0$, то

общий член ряда не стремится к нулю (здесь по правилу Лопиталя

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{2^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{2^n\ln 2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{2^n\ln^2 2}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6}{2^n\ln^3 2}=0$). Необходимое условие сходимости ряда не выполнено, и поэтому исходный ряд расходится.

c) Так как, по правилу Лопиталя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln^2 n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0$, и

$\left(\frac{\ln^2 n}{n}\right)'=\frac{\ln n}{n^2}(2-\ln n)<0$ при $n\geq 8$, то условия признака Лейбница выполнены.

Поэтому данный ряд сходится. Заметим, что ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, расходится:

$$\int\limits_2^{\infty}\frac{\ln^2 x}{x}dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_2^{b}\ln^2 x\,d(\ln x)=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\ln^3 x\Big|_2^b=\frac{1}{3}\lim_{b\to+\infty}\left(\ln^3 b-\ln^3 2\right)=+\infty.$$

Поэтому ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\ln^2 n}{n}$ сходится *условно.*

5. Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(5x)^{n^2}}{n}$.

<u>Решение</u>. Обозначим через u_n общий член данного ряда. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{(n+1)^2}\cdot|x|^{(n+1)^2}\,n}{(n+1)\cdot 5^{n^2}\cdot|x|^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\cdot 5^{2n+1}\cdot|x|^{2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}|5x|^{2n+1}=$$

$$=\begin{cases}\infty, & \text{если } |5x|>1,\\ 0, & \text{если } |5x|<1.\end{cases}$$

На основании признака Даламбера можно утверждать, что ряд сходится (и притом абсолютно), если $|5x|<1$, то есть $-\dfrac{1}{5}<x<\dfrac{1}{5}$; ряд расходится, если $|5x|>1$, т.е. $-\infty<x<-\dfrac{1}{5}$ или $\dfrac{1}{5}<x<\infty$.

При $x=\dfrac{1}{5}$ получаем гармонический ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$, который расходится, а при $x=-\dfrac{1}{5}$ – ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n^2}}{n}$, который сходится (условно) по признаку Лейбница.

Итак, ряд сходится при $-\dfrac{1}{5}\le x<\dfrac{1}{5}$.

6. Разложить функцию $\dfrac{1}{x^2-3x+2}$ в ряд Тейлора по степеням $x+2$, найти область сходимости полученного ряда.

<u>Решение</u>. Представим данную функцию в виде суммы простейших дробей:

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-1}.$$

Умножая это равенство на знаменатель левой части, придем к тождеству: $1\equiv A(x-1)+B(x-2)$. При $x=1$ получим $B=-1$, при $x=2$ получим $A=1$. Таким образом,

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x+2-4}-\frac{1}{x+2-3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+2}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{x+2}{4}}.$$

Так как

$$\frac{1}{1-\dfrac{x+2}{3}}=1+\frac{x+2}{3}+\left(\frac{x+2}{3}\right)^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{3}\right)^n \tag{1}$$

и

$$\frac{1}{1-\dfrac{x+2}{4}}=1+\frac{x+2}{4}+\left(\frac{x+2}{4}\right)^2+\dots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n, \tag{2}$$

то окончательно получаем

$$\frac{1}{x^2-3x+2}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+2}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}}\right)(x+2)^n. \tag{3}$$

Геометрические прогрессии (1) и (2) сходятся соответственно при $|x+2|<3$ и $|x+2|<4$; следовательно, формула (3) справедлива при $|x+2|<3$, т.е. при $-5<x<1$.

7. Написать разложение в степенной ряд относительно x функции $x^2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)$.

Р е ш е н и е. Так как

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}x^n+\dots\quad(-1<x\le 1),$$

то

$$\ln\left(1+\sqrt{x}\right)=\sqrt{x}-\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{2}+\frac{\left(\sqrt{x}\right)^3}{3}-\dots+(-1)^{n+1}\left(\sqrt{x}\right)^n+\dots\quad\left(0\le\sqrt{x}\le 1\right).$$

Следовательно, $x^2\ln\left(1+\sqrt{x}\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{2+n/2}\quad(0\le x\le 1)$.

8. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5+n)n!}$ с точностью 0,0001.

Решение. Сходимость ряда следует из признака Лейбница. Так как для сходящегося ряда его сумма $S = S_n + r_n$, то при достаточно больших n можно считать, что $S \approx S_n$, причем для остатка ряда справедлива оценка:

$$|r_n| < |a_{n+1}|.$$

В данном примере $a_{n+1} = \frac{1}{(6+n)(n+1)!}$. По условию задачи должно выполняться неравенство $a_{n+1} = \frac{1}{(6+n)(n+1)!} < 0{,}0001$. Эта оценка удовлетворяется уже при $n = 6$:

$$12 \cdot 7! = 60480 > 6 \cdot 10^4, \quad \frac{1}{12 \cdot 7!} < \frac{1}{6} \cdot 10^{-4} < 2 \cdot 10^{-5} < 0{,}0001.$$

Следовательно, для решения задачи можно отбросить все члены ряда, начиная с $a_7 = \frac{1}{12 \cdot 7!}$, и вычислить сумму только первых шести членов. Для того чтобы гарантировать требуемую точность, будем вычислять каждое слагаемое с пятью знаками после запятой, делая округление на пятом знаке. При такой точности вычислений ошибка при подсчете каждого слагаемого будет меньше, чем $5 \cdot 10^{-6}$, и накопление таких ошибок от двух слагаемых (сумма первых пяти членов ряда $-\frac{1061}{9450}$ вычислена точно) будет меньше, чем $1 \cdot 10^{-5}$. В результате вычислений получаем:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(5+n)n!} \approx S_6 = -\frac{1}{6 \cdot 1!} + \frac{1}{7 \cdot 2!} - \frac{1}{8 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{10 \cdot 5!} + \frac{1}{11 \cdot 6!} = .$$

$$= -\frac{1061}{9450} + \frac{1}{7920} \approx -0{,}11227 + 0{,}00013 = -0{,}11214 \approx -0{,}1121.$$

Окончательная погрешность вычислений (т.е. сумма погрешности от отбрасывания всех членов ряда, начиная с седьмого, и погрешности от неточного вычисления шести членов ряда) меньше, чем $2\cdot 10^{-5}+1\cdot 10^{-5}=3\cdot 10^{-5}<0{,}0001$.

Итак, $S\approx S_6\approx -0{,}1121$.

9. Сколько нужно взять членов ряда $\cos x\approx 1-\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^4}{4!}+\cdots$, чтобы вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 0,001?

Решение. Для вычисления $\cos 18^\circ=\cos\dfrac{\pi}{10}$ воспользуемся разложением

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots\quad(-\infty<x<+\infty).$$

При $x=\dfrac{\pi}{10}$ имеем: $\cos\dfrac{\pi}{10}=1-\dfrac{\pi^2}{10^2\cdot 2!}+\dfrac{\pi^4}{10^4\cdot 4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{\pi^{2n}}{10^n(2n)!}+\cdots$

Остаточный член $R_n(x)=\dfrac{\left|\cos\left(\theta x+(n+1)\dfrac{\pi}{2}\right)\right|}{(n+1)!}|x|^{n+1}\le\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$. Таким образом, чтобы абсолютная погрешность приближения числа $\cos\dfrac{\pi}{10}$ числом $1-\dfrac{\pi^2}{10^2\cdot 2!}+\dfrac{\pi^4}{10^4\cdot 4!}-\cdots+(-1)^n\dfrac{\pi^{2n}}{10^n(2n)!}+\cdots$ не превосходила 10^{-3}, достаточно, чтобы имело место неравенство $\dfrac{\pi^{n+1}}{10^{n+1}(n+1)!}\le 0{,}001$. Этому условию удовлетворяет уже $n=3$. Итак, чтобы вычислить $\cos 18^\circ$ с точностью до 0,001 нужно взять два члена: $\cos 18^\circ=\cos\dfrac{\pi}{10}=1-\dfrac{\pi^2}{2\cdot 10^2}\approx 0{,}951$.

10. Вычислить интеграл $\int\limits_0^{0{,}25}\mathrm{e}^{-x^2}\,dx$ с точностью до 0,001, используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд.

Решение. Заменив x на $\left(-x^2\right)$ в разложении

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \quad (-\infty < x < +\infty),$$

получим $\mathrm{e}^{-x^2} = 1 - x^2 + \dfrac{x^4}{2!} - \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n}}{n!} + \cdots$.

Почленно интегрируя этот ряд на отрезке $[0; 0{,}25]$, находим

$$\int_0^{0,25} e^{-x^2} dx = \int_0^{0,25} dx - \int_0^{0,25} x^2 dx + \frac{1}{2!}\int_0^{0,25} x^4 dx + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}\int_0^{0,25} x^{2n} dx + \cdots =$$

$$= x\Big|_0^{0,25} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{0,25} + \frac{x^5}{2!\cdot 5}\Big|_0^{0,25} + \cdots + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{n!(2n+1)}\Big|_0^{0,25} + \cdots =$$

$$= 0{,}25 - \frac{0{,}25^3}{3} + \frac{0{,}25^5}{2!\cdot 5} - \cdots = 0{,}25 - 0{,}00521 + 0{,}00010 - \cdots \approx$$

$$\approx 0{,}25 - 0{,}00521 \approx 0{,}2448 .$$

Библиографический список

1. **Виноградова, И.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу / в 2 кн ; И.А. Виноградова, С.Н. Олехник, В.А. Садовничий ; М. : Высш. шк., 2000. Кн. 2. – 712 с.
2. **Кудрявцев, Л.Д.** Сборник задач по математическому анализу. Интегралы. Ряды / Л.Д. Кудрявцев, А.Д. Кутасов, В.И. Чехлов, М.И. Шабунин **;** М. : Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. 1986. – 528 с.
3. **Практикум по высшей математике для экономистов**. Под ред. Н.Ш. Кремера. М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 423 с.
4. **Солодовников, А.С.** Математика в экономике / А.С. Солодовников**, В.А.** Бабайцев, А.В. Браилов ; М. : Финансы и статистика, 2001. Ч. 2. – 560 с.
5. **Кузьмина, С.С.** Числовые ряды : метод. указания / С.С. Кузьмина, О.Я. Шевалдина ; Ектб. : ГОУ ВПО УГТУ – УПИ, 2005. – 58 с.

Учебное электрон текстовое издание

Кузнецова Ольга Леонидовна
Шевалдина Ольга Яковлевна

РЯДЫ

Редактор *Н.В. Лутова*
Компьютерная верстка *Н.В. Лутова*

Рекомендовано РИС ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
Разрешен к публикации 09.02.06.

Электронный формат – PDF

Формат 60x90 1/8

Издательство ГОУ-ВПО УГТУ-УПИ
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19
e-mail: sh@uchdep.ustu.ru

Информационный портал
ГОУ ВПО УГТУ-УПИ
http://www.ustu.ru